



金榜時代®
GLISTIME 明德·弘毅·惟精

金榜时代考研数学书课——上岸学习包

数学基础过关

660题

(数 学 三)
≡ 答 案 册 ≡

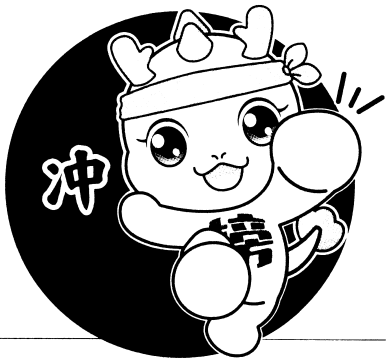
编著 © 李永乐 王式安 武忠祥 宋浩 薛威 刘喜波 姜晓千



扫描二维码，获取更多免费资料

目录

CONTENTS



基础过关 1 阶

微 积 分

填空题.....	7
选择题	49

线性代数

填空题.....	113
选择题.....	133

概率论与数理统计

填空题.....	165
选择题.....	182

基础过关 2 阶

微 积 分

填空题.....	209
选择题.....	225

1阶

基础过关



扫描二维码，获取更多免费资料

微积分水平自测一答案

本自测题极容易,你应当快速完成测试,毫无压力。

如果你解答这些题还有困难,请自行补课,推荐《考研数学复习全书·基础篇·高等数学基础》。

1. 【答案】 D

$$\begin{aligned}\text{【分析】} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27 - 27n + 9n^2 - n^3}{n^2 + 2n + 1 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 + 9n^2 - 27n + 27}{-n^3 - 2n^2 - n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{9}{n} - \frac{27}{n^2} + \frac{27}{n^3}}{-1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \\&= 1.\end{aligned}$$

2. 【答案】 C

【分析】 显然 $f(x)$ 可导,则极值点必然为驻点,又有

$$f'(x) = a \cos x + \cos 3x$$

故 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} - 1 = 0$, 故 $a = 2$.

3. 【答案】 C

【分析】 $y^{(n)} = (x^n + e^x)^{(n)} = (x^n)^{(n)} + (e^x)^{(n)}$, 显然 $(x^n)^{(n)} = n!$, $(e^x)^{(n)} = e^x$.
故有 $y^{(n)} = (x^n + e^x)^{(n)} = n! + e^x$.

4. 【答案】 C

【分析】 $\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e 1 dx = e - e + 1 = 1$.

5. 【答案】 A

【分析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2} = -\frac{2y}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}$,

故

$$\begin{aligned}dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{2y dx}{(x-y)^2} + \frac{2x dy}{(x-y)^2} \\&= \frac{2(x dy - y dx)}{(x-y)^2}.\end{aligned}$$



6. 【答案】 D

【分析】 由幂级数的收敛半径计算公式可得

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{3} = \frac{e}{3},\end{aligned}$$

故幂级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = \frac{3}{e}$.

7. 【答案】 1

【分析】 由洛必达法则和变限积分函数求导公式, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t dt}{\int_0^x t dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

8. 【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【分析】 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上均连续, 下面讨论 $x = 1$ 处的连续性.

$$\begin{aligned}f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin[\pi(x-1)]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \pi \cdot \cos[\pi(x-1)] = \pi \\ f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\arcsin \frac{1}{x} + k\right) = \frac{\pi}{2} + k\end{aligned}$$

若要使 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 则应有 $f(1^-) = f(1^+)$, 故 $k = \frac{\pi}{2}$.

9. 【答案】 $y = \frac{x}{4} + 1$

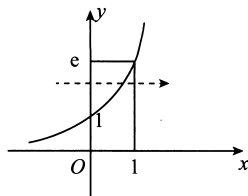
【分析】 $y = \sqrt{x}$, 则 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. $x = 4$ 时, $y = 2, y' = \frac{1}{4}$.

可得切线方程为 $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{x}{4} - 1$, 即 $y = \frac{x}{4} + 1$.

10. 【答案】 $\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x, y) dx$

【分析】 根据二重积分画出来积分区域如右图, 于是直接交换积分次序为

$$\int_1^e dy \int_0^{\ln y} f(x, y) dx.$$



微积分水平自测二答案

本自测 10 个小题都是基本的概念与计算,难度不大。同学你应当在规定时间内完成解答,并且不感到有什么困难。
如果确实有困难,请自行补课,推荐《考研数学复习全书·基础篇·高等数学基础》。

1. 【答案】 C

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x^2 - 1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{3}.$

2. 【答案】 A

【分析】 记 $u = x^2$, 则 $x = -1$ 时 $u = 1$,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-1} = \left[\frac{d}{du} f(u) \right] \Big|_{u=1} \cdot \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=-1} = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

所以 $dy|_{x=-1} = -dx$.

3. 【答案】 C

【分析】 $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin t dt = \sin x^2 \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \sin x^2.$

4. 【答案】 D

【分析】 由已知, $\int f(x) dx = \ln^2 x + C, f(x) = \frac{2 \ln x}{x}.$

$$\int x f'(x) dx = \int x d(f(x)) = x f(x) - \int f(x) dx = 2 \ln x - \ln^2 x + C$$

答案选(D).

5. 【答案】 B

【分析】 令 $t = \sqrt{2x-1}$, 则 $\int_1^5 e^{\sqrt{2x-1}} dx = \int_1^3 e^t dt = (e^t - e^1) \Big|_1^3 = 2e^3$, 所以选(B).

6. 【答案】 A

【分析】 $f(x+y, xy) = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy.$

记 $u = x+y, v = xy, f(u, v) = u^2 - 2v$, 或改记成 $f(x, y) = x^2 - 2y.$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2x - 2.$$

7. 【答案】 $-\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C$



【分析】 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx = \int \arctan x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{\arctan x}{x^2} dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx.$

$$\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = - \int \arctan x d\left(\frac{1}{x}\right) = - \frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

$$= - \frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx^2$$

$$= - \frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx^2$$

$$= - \frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C_1.$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C_2,$$

所以 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx = - \frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C.$

8. 【答案】 $-9, 13$

【分析】 由题设可知

$$f(1) = a + b + 1 = 5$$

$$f'(1) = (3ax^2 + 2bx + 1)|_{x=1} = 3a + 2b + 1 = 0$$

即

$$\begin{cases} a + b + 1 = 5 \\ 3a + 2b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 2 = 10 \\ 3a + 2b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 13 \end{cases}.$$

9. 【答案】 0

【分析】 $\int_0^2 x f'(x) dx = \int_0^2 x df(x) = x f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 4 - 4 = 0.$

10. 【答案】 $2xy^2 \cos(2x+y) - 2x^2 y^2 \sin(2x+y), 2x^2 y \cos(2x+y) - x^2 y^2 \sin(2x+y)$

【分析】 由二元函数求偏导的链式法则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \cos v \cdot y - u^2 \sin v \cdot 2$$

$$= 2xy^2 \cos(2x+y) - 2x^2 y^2 \sin(2x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \cos v \cdot x - u^2 \sin v \cdot 1$$

$$= 2x^2 y \cos(2x+y) - x^2 y^2 \sin(2x+y).$$



微积分



填空题

函数、极限、连续

A 组

1

【答案】

$$\begin{cases} \sin x, & 1 < |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ x, & |x| \leq 1 \text{ 或 } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

【分析】 当 $|x| \leq 1$ 时,

$$\varphi(x) = \arcsin x, |\varphi(x)| = |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, f[\varphi(x)] = \sin(\arcsin x) = x;$$

$$\text{当 } 1 < |x| \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \varphi(x) = x, |\varphi(x)| = |x| \leq \frac{\pi}{2}, f[\varphi(x)] = \sin x;$$

$$\text{当 } |x| > \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \varphi(x) = x, |\varphi(x)| = |x| > \frac{\pi}{2}, f[\varphi(x)] = x. \text{ 所以}$$

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} \sin x, & 1 < |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ x, & |x| \leq 1 \text{ 或 } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2

【答案】 2

【分析】 方法 1 先求出 $g(f(x))$

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2 - f(x), & f(x) \leq 0, \\ 2 + f(x), & f(x) > 0, \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x < 0$; 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$. 于是

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \begin{cases} 2 + x^2, & x < 0, \\ 2 - (-x), & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 + x^2, & x < 0, \\ 2 + x, & x \geq 0, \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x) = 2, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + x^2) = 2, \end{aligned}$$

因此, $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 2$.

方法 2 不必求出 $g(f(x))$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [2 - (-x)] = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + x^2) = 2.$$

因此, $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 2$.



3 【答案】 7

【分析】 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$,

所以 $f(x) = x^2 - 2, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$.

难吗? 不会做? 可以看
《考研数学复习全书·基础篇·
高等数学基础》第一章

4 【答案】 2

【分析】 由
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)}{x} = 3 \quad (1)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 分母为无穷小, 所以分子也为无穷小, 进一步有 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{f(x)}{x}\right) = 0$.

因此, 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\ln\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) \sim x + \frac{f(x)}{x}$$

所以(1)可写为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} = 3$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$.

5 【答案】 $-1, 0$

【分析】 由泰勒展开, 当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\sqrt[3]{1 - x^6} = -x^2 \left(1 - \frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{3}} = -x^2 \left(1 - \frac{1}{3x^6} + o(x^{-6})\right)$$

所以 $a = -1, b = 0$.

6 【答案】 1

【分析】 方法1 分子有理化,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan x) - (1 - \sin x)}{x(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 - \sin x})} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \sin x}{x} = 1. \end{aligned}$$

方法2 等价无穷小替换, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sqrt{1 + \tan x} - 1 \sim \frac{1}{2} \tan x, \sqrt{1 - \sin x} - 1 \sim -\frac{1}{2} \sin x, e^x - 1 \sim x,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \tan x} - 1) - (\sqrt{1 - \sin x} - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \tan x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \sin x}{x} = 1. \end{aligned}$$



【评注】(1) 本题的另一种题型为:

当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = \sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \sin x}$ 的等价无穷小为_____.

答案为: x .

(2) 若本题改为:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{(e^x - 1)^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

则分母还能用等价无穷小替换, $(e^x - 1)^3 \sim x^3, x \rightarrow 0$, 分子则只能用分子有理化方法.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{(e^x - 1)^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3 (\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

7

【答案】 0

【分析】

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{\frac{\beta}{\alpha} x}} \right)^{\alpha}$$

用洛必达法则求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{\beta}{\alpha} x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha} e^{\frac{\beta}{\alpha} x}} = 0$$

$\Rightarrow I = 0$.

8

【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x \ln \cos x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x \ln \cos x}{x^3} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \ln[1 + (\cos x - 1)]}{x^3} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(-\frac{1}{2} x^2 \right)}{x^3} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

9

【答案】 $\begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ \frac{1}{2}, & a = 1, \\ 1, & a > 1 \end{cases}$

【分析】

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{1 + a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^{-x} + 1}$, 分 $0 < a < 1, a = 1, a > 1$ 讨论, 易知如上所填.



10 【答案】 -1【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 6$. 记 $t = \arcsin x$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax^3} - 1}{x - \arcsin x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{a \sin^3 t} - 1}{\sin t - t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a \sin^3 t}{\sin t - t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{at^3}{\sin t - t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3at^2}{\cos t - 1} = -6a.\end{aligned}$$

所以当 $a = -1$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

B 组

11 【答案】 1

【分析】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1+x^2)^2 - x^2]}{\frac{1}{\cos x}(1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2+x^4)}{2(1 - \cos x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4}{\frac{1}{2}x^2} = 1$.

12 【答案】 0【分析】 这是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 先作如下变形:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x}{x^4}$$

可用的方法是洛必达法则(计算较繁)与泰勒公式.

注意泰勒公式

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0) \quad (x^4 \text{ 项系数为 } 0)$$

 $\Rightarrow$

$$x \sin x^2 = x(x^2 + o(x^4)) = x^3 + o(x^5)$$

$$-2 \sin x = -2\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) = -2x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$\sin 2x = 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^4) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$$

相加得

$$x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x = 0 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$$

因此

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0.$$

【评注】 如果求

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x}{x^5}$$

就要把 $\sin x$ 展开到 x^5 项:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

然后可得

$$x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x = \frac{1}{4}x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$



于是

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}.$$

13 【答案】 0

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}} = 0;$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} = -\frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} = -\frac{\pi}{2} \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}}{1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{2}{x}}} = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} = 0.$

14 【答案】 2

【分析】 $\frac{2}{x} - 1 < \left[\frac{2}{x} \right] \leq \frac{2}{x},$

因此, 当 $x > 0, 2 - x < x \left[\frac{2}{x} \right] \leq 2;$

当 $x < 0, 2 \leq x \left[\frac{2}{x} \right] < 2 - x.$

又 $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - x) = 2,$ 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{2}{x} \right] = 2.$$

15 【答案】 $\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}$

【分析】 此为“ $\infty - \infty$ ”型, 先通分

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{f'(a)(x-a)} - \frac{1}{f(x) - f(a)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{f'(a)(x-a)(f(x) - f(a))}.$$

以下有两个方法.

方法 1 用洛必达法则.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{f'(a)(x-a)[f(x) - f(a)]} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{f'(a)[f(x) - f(a) + (x-a)f'(x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f'(x) - f'(a)}{x-a}}{f'(a) \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + f'(x) \right]} = \frac{f''(a)}{f'(a)[f'(a) + f'(a)]} \\ &= \frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}. \end{aligned}$$

这里第一个等式之后不能再洛必达法则, 这是因为未设 $f''(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内存在, 而



只设 $f''(a)$ 存在, 所以应该改用凑二阶导数的定义的办法.

方法2 用佩亚诺余项泰勒公式展开.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

代入分子

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{f'(a)(x-a)[f(x) - f(a)]} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)}{f'(a)(x-a)[f(x) - f(a)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f''(a)}{2} + \frac{o((x-a)^2)}{(x-a)^2}}{f'(a) \frac{f(x) - f(a)}{x-a}} = \frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}.\end{aligned}$$

【评注】 错误做法:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{f'(a)(x-a)} - \frac{1}{f(x) - f(a)} \right] &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{f'(a)(x-a)} - \frac{1}{f'(\xi)(x-a)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(\xi) - f'(a)}{f'(a)f'(\xi)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f'(\xi) - f'(a)}{\xi - a}}{f'(a)f'(\xi) \frac{x-a}{\xi-a}} = \frac{f''(a)}{[f'(a)]^2} \cdot 1.\end{aligned}$$

这里错误的原因是, 误认为 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{\xi-a} = 1$.

16

【答案】 $e^{-2x} + \frac{1}{e^2 - 1} x^{\frac{2}{1-x}}$

【分析】 记 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$, 于是有 $f(x) = e^{-2x} + x^{\frac{2}{1-x}} A$,

$$\begin{aligned}A &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e^{-2} + A \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{1-x}} \\ &= e^{-2} + A \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{2 \ln x}{1-x}},\end{aligned}$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{-1} = -2,$$

所以 $A = e^{-2} + A e^{-2}$, 解得

$$\begin{aligned}A &= \frac{e^{-2}}{1 - e^{-2}} = \frac{1}{e^2 - 1} \\ f(x) &= e^{-2x} + \frac{1}{e^2 - 1} x^{\frac{2}{1-x}}.\end{aligned}$$

17

【答案】 $\frac{4}{e}$

【分析】 首先想到取对数, 将连乘积化成求和. 由求和的形式考虑使用积分和式求极限.
命

$$\begin{aligned}u_n &= \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}, \\ \ln u_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right)\end{aligned}$$



由积分和式知,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \ln u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= \left[(x+1) \ln(1+x) - x \right] \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1 = \ln \frac{4}{e}.\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{4}{e}$.

18

【答案】 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【分析】 显然

$$0 < x_n = \frac{2(1+x_{n-1})-1}{1+x_{n-1}} = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}} < 2 \quad (n=1,2,3,\dots)$$

即 $\{x_n\}$ 有界.

令 $f(x) = 2 - \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(x) \nearrow (x \geq 0) \Rightarrow x_{n+1} = f(x_n) (n=1,2,3,\dots)$ 单调.

因此 $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

对递归方程 $x_n = \frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 两边取极限得 $a = \frac{1+2a}{1+a}$, 即

$$a^2 - a - 1 = 0$$

解得 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【评注】 也可按定义证明 $\{x_n\}$ 单调. 考察

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n &= \left(2 - \frac{1}{1+x_n}\right) - \left(2 - \frac{1}{1+x_{n-1}}\right) = \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+x_n} \\ &= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} \quad (n=1,2,3,\dots)\end{aligned}$$

又 $x_1 = 1 < x_2 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$, 由归纳法可知 $\{x_n\} \nearrow$.

19

【答案】 $x = \pm 1$

【分析】 当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, 所以此时 $f(x) = \frac{1}{x+4}$;

$$\text{当 } |x| > 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n+1} - x^n + x + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{2n}} + \frac{4}{x^{2n+1}}} = 1;$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n+1} - x^n + x + 4} = 0;$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n+1} - x^n + x + 4} = \frac{2}{5}.$$



$$\text{综上, } f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \\ \frac{1}{x+4}, & -1 < x < 1 \\ \frac{2}{5}, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}, \text{ 所以 } x = \pm 1 \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点.}$$

20 【答案】 (1, e)

【分析】 $f(x)$ 只有间断点 $x = a, x = b$.

当 $a = 1, b = e$ 时

$$f(x) = \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} = \frac{1}{1-e} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \frac{e}{1-e},$$

$x = 1$ 为可去间断点.

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} = \infty$$

$x = e$ 为无穷间断点.

当 $a = e, b = 1$ 时

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{(x-e)(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow e} f(x) = \infty.$$

$x = 1, x = e$ 均为无穷间断点. 因此, $(a, b) = (1, e)$.

一元函数微分学

A 组

21

【答案】

$$\begin{cases} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}, & -\infty < x < 1, x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

【分析】 首先由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续确定 b 值:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x} = b = f(0) = -1$$

$$\Rightarrow b = -1.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x}, & -\infty < x < 1, x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ 时

$$f'(x) = \frac{\frac{-x}{1-x} - \ln(1-x)}{x^2} = \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)} (-\infty < x < 1, x \neq 0)$$

下求 $f'(0)$.

按定义求 $f'(0)$.



$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1-x)}{x} + 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{1-x} + 1}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + 1 - x}{2x} \cdot \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

或用泰勒公式

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

【评注】 求形如 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ A, & x = x_0 \end{cases}$ 的分段函数在分段点处的导数时一般要用定义来求,或函数在分段点连续的条件下求导数的极限.即用下面定理求分段函数在分段点的导数:(1) $f(x)$ 在 x_0 处连续;(2) $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内可导;(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在,则 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

22 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【分析】 $f'(x)$ 以 3 为周期且是奇函数:

$$f'(5) = f'(2) = -f'(-2)$$

现按导数定义求此极限.

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-2\sin h) - f(5)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(5-2\sin h) - f(5)}{-2\sin h} \times \frac{-2\sin h}{h} \right] \\
 &= -2f'(5) = -2 \times [-f'(-2)] \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

因此,原极限 $= -\frac{1}{2}$.

23 【答案】 $x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$

【分析】 $f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x}$,

$$f'(x) = e^{\sin x \cdot \ln x} (\sin x \cdot \ln x)' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

24 【答案】 72

【分析】 记 $g(x) = (x+1)^2 (x+2)^2 (x+3)^2$, 则

$$f(x) = x^2 g(x),$$

$$f'(x) = 2xg(x) + x^2 g'(x),$$

$$f''(x) = 2g(x) + 4xg'(x) + x^2 g''(x),$$

$$\text{所以 } f''(0) = 2g(0) = 72.$$

知识点链接

《考研数学复习全书·基础篇·
高等数学基础》第二章



25

【答案】 $\frac{2e^{2x}}{(e^{4x}+1)^{3/2}}dx$

【分析】 $dy = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1} \right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(e^{4x}+1)4e^{4x} - e^{4x} \cdot 4e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2} dx = \frac{2e^{2x}}{(e^{4x}+1)^{3/2}} dx.$

26

【答案】 -70

【分析】 方法1 $f(x) = \ln \frac{1-2x}{1+3x} = \ln(1-2x) - \ln(1+3x),$

$$f'(x) = -\frac{2}{1-2x} - \frac{3}{1+3x},$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(1-2x)^2} + \frac{9}{(1+3x)^2},$$

$$f'''(x) = -\frac{16}{(1-2x)^3} - \frac{54}{(1+3x)^3},$$

所以 $f'''(0) = -70.$

方法2 用泰勒公式. 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$f(x) = \ln(1-2x) - \ln(1+3x)$$

$$= (-2x) - \frac{1}{2}(-2x)^2 + \frac{1}{3}(-2x)^3 - 3x + \frac{1}{2}(3x)^2 - \frac{1}{3}(3x)^3 + o(x^3)$$

$$\text{所以 } \frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{2^3}{3} - \frac{3^3}{3}, f'''(0) = -70.$$

27

【答案】 $y = x - 1$

【分析】 直线 $x+y=2$ 的斜率为 $k_1 = -1$, 故与直线 $x+y=2$ 垂直的切线的斜率为 $k_2 = 1$.

$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x} = 1$, 解得 $x = 1$. 所以曲线 $y = \ln x$ 上 $x = 1$ 点处的切线与直线 $x +$

$y = 2$ 垂直. 此时切线方程为 $y = x - 1$.

28

【答案】 $y = -\frac{1}{2}x$

【分析】 由连续性, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 于是 $f(0) = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = 2 \times 1 = 2$$

$\Rightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的法线斜率为 $-\frac{1}{2}$, 法线方程为 $y = -\frac{1}{2}x$.

29

【答案】 $y = \ln 2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$

【分析】 $f'(x) = \ln(1 + \sin x)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln 2$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 处的切线

方程为 $y = \ln 2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$.



30 【答案】 $(-\infty, -1], [3, +\infty); [-1, 1), (1, 3]; f(-1) = -2$ 是极大值,

$f(3) = 0$ 是极小值; $(1, +\infty); (-\infty, 1)$

【分析】 $y = \frac{[(x-1) + (-2)]^2}{4(x-1)} = \frac{1}{4}(x-1) - 1 + \frac{1}{x-1}$

$$y' = \frac{1}{4} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{4(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$. $y'' \neq 0, x = 1$ 处 y 无定义. 现用 $x = -1, x = 1, x = 3$ 将定义域分成如下区间并列表示:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	-	无定义	-	0	+
y''	-	-	-		+	+	+
y		-2				0	

31 【答案】 $-3, -9$

【分析】 求出 $y'' = 6x + 2a$.

$(1, 3)$ 为该曲线拐点 $\Rightarrow$

$$y(1) = 1 + a + b + 14 = 3$$

$$y''(1) = 6 + 2a = 0$$

$\Rightarrow a = -3, b = -9$. 又

$$y''(x) = 6x - 6 = 6(x-1) \begin{cases} > 0, & x > 1 \\ = 0, & x = 1 \\ < 0, & x < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = -3, b = -9$ 时 $(1, 3)$ 确为该曲线的拐点.

因此, $a = -3, b = -9$.

B 组

32 【答案】 $-2, 1$

【分析】 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处必连续, 从而 $f(0^-) = f(0^+) = f(0)$.

于是由 $f(0) = b$ 及

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 1 = 1, f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b,$$

推知 $b = 1$. 又 $f'(0)$ 存在, 所以 $f'_-(0) = f'_+(0)$.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} + \cos x - 1}{x} = 0,$$



$$\begin{aligned}
 f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) + ax + e^x - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} + a + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \\
 &= 1 + a + 1,
 \end{aligned}$$

由 $f'_-(0) = f'_+(0)$ 推知 $0 = 1 + a + 1$, 所以 $a = -2$.

【评注】 已知 $f(x)$ 在某点 x_0 处可导, 讨论其中的参数, 方法如下: 如果该点是分段函数的分界点, 那么先由连续性推知 $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$, 得到一些关系式. 再由可导性, 又得到一些关系式 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, 解之便可.

33

【答案】

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), & x > 1 \end{cases}$$

【分析】 注意在 $x = 1$ 处 $\arctan x \Big|_{x=1} = \left[\frac{1}{2}(e^{x^2-1} - x) + \frac{\pi}{4} \right] \Big|_{x=1}$. 易得

$$f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x < 1$$

其中 $x = 1$ 处, $f'_-(1) = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}(e^{x^2-1} - x) + \frac{\pi}{4} \right]' = \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), x > 1$$

其中 $x = 1$ 处, $f'_+(1) = \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1) \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$.

$$\text{因为 } f'_+(1) = f'_-(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{因此 } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), & x > 1 \end{cases}.$$

34

【答案】

$$\frac{1}{2}f''(a)$$

【分析】 方法 1 $I = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} \quad (1)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2}f''(a). \quad (3)$$

(1) 式到(2)式用了洛必达法则, (2) 式到(3)式利用了 $f'(x)$ 在 $x = a$ 处的导数定义.

【评注】 由于题设中没有 $f''(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内存在及 $f''(x)$ 在 $x = a$ 是连续的, 所以(2)式到(3)式不能利用洛必达法则. 由 $f''(a)$ 存在 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $x = a$ 某邻域有定义, 对(1)式可用洛必达法则.

方法 2 用泰勒公式.



$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

代入得

$$I = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2)}{h} - f'(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2}f''(a) + \frac{o(h^2)}{h^2} \right] = \frac{1}{2}f''(a).$$

35 【答案】 1

【分析】 利用导数定义, 转化为求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[1+\varphi(x)] - f(1)}{\varphi(x)} = f'(1)$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$.

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(1+x) - f(1)}{x} \cdot \frac{x}{x+2\sin x} - \frac{f(1-2\sin x) - f(1)}{-2\sin x} \cdot \frac{-2\sin x}{x+2\sin x} \right]$$

$$= f'(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+2\sin x} + f'(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{x+2\sin x}$$

$$= f'(1) \cdot \frac{1}{3} + f'(1) \cdot \frac{2}{3} = f'(1) = 1.$$

36 【答案】 $-\sum_{k=1}^n \frac{2^k + (-1)^{k+1}3^k}{k} x^k$

【分析】 $f(x) = \ln \frac{1-2x}{1+3x} = \ln(1-2x) - \ln(1+3x)$

$$= -\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} x^k - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}3^k}{k} x^k + o(x^n), x \rightarrow 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 点处的 n 次泰勒多项式为

$$-\sum_{k=1}^n \frac{2^k + (-1)^{k+1}3^k}{k} x^k.$$

37 【答案】 0

【分析】 方法1 若知道以下事实: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b > 0 (< 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$, 立即可得 $b = 0$. 否则由 $b > 0$ (或 $b < 0$) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$ 与 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 有界矛盾.

【评注】 实质上就是用反证法证明 $b = 0$, 不妨设 $b > 0$, 取 a 满足 $0 < a < b$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b > a$, 则存在 $x_0 > 0$, 当 $x \geq x_0$ 时 $f'(x) > a$, 在 $[x_0, x]$ 上用拉格朗日中值定理,

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > a(x - x_0) \quad (\xi \in (x_0, x))$$

即 $f(x) > a(x - x_0) + f(x_0)$, 因

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [a(x - x_0) + f(x_0)] = +\infty$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 从而 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 上无界, 这与 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 上是有界函数矛盾.



方法2 因 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 可导, 有界.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b \Rightarrow b = 0.$$

【评注】事实上有如下结论: 设

(1) $f(x), g(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 为有限或 ∞),

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

也就是, 在上述情形下, 我们可不必验证分子 $f(x)$ 是否为无穷大量. 方法2中用到了这个结论.

38

【答案】 $x = 1$

【分析】将方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 两边对 x 求导, 得

$$6y^2 y' - 4yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0$$

整理得

$$y'(3y^2 - 2y + x) = x - y \quad (1)$$

令 $y' = 0$, 有 $x = y$, 将其代入 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 得

$$2x^3 - x^2 - 1 = (x^3 - 1) + (x^3 - x^2) = 0$$

即 $(x-1)(2x^2+x+1) = 0$, 于是 $x = 1$ 是唯一的驻点. 此时, $y = x = 1$.

进一步判断 $x = 1$ 是否是极值点:

对(1)求导 $y''(3y^2 - 2y + x) + y'(3y^2 - 2y + x)'_x = 1 - y'$

把 $x = 1, y = 1, y'(1) = 0$ 代入上式, 得 $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$, 于是 $y(x)$ 只有极值点为 $x = 1$,

它是极小值点.

39

【答案】 3

【分析】由于 $y(x)$ 二阶可导, $(x_0, 3)$ 是拐点, 则 $y(x_0) = 3, y''(x_0) = 0$.

先求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (4-y)\beta y^{\beta-1} \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} y^\beta = \frac{dy}{dx} y^{\beta-1} [(4-y)\beta - y]$$

$$\text{由 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0} = 0, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = [4 - y(x_0)] y(x_0)^\beta = 3^\beta \neq 0.$$

$$[4 - y(x_0)]\beta - y(x_0) = 0$$

$$\beta = \frac{3}{4-3} = 3.$$

40

【答案】 $y = \frac{1}{3}x - 1$

【分析】由极限与无穷小的关系有

$$\frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x} = 2 + \alpha, \lim_{x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$



解得

$$f(x) = \frac{(2+\alpha)(x - \sin x)}{x^2} - 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+\alpha)(x - \sin x)}{x^3} \\ &= \frac{1}{3} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} \right). \end{aligned}$$

所以曲线在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{3}(x - 0) - 1 = \frac{1}{3}x - 1$.

【评注】 本题也可由佩亚诺余项泰勒公式, 展开 $x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ 求得 $f(0)$ 及 $f'(0)$. 读者不妨一试.

41 【答案】 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$

【分析】 设切点坐标 (ξ, η) , 其中 $\xi > 0, \eta = 1 - \xi^2$. 切线方程为 $y - \eta = -2\xi(x - \xi)$. 在两坐标上的截距分别为

$$X = \frac{\eta}{2\xi} + \xi = \frac{1 + \xi^2}{2\xi}, \quad Y = \eta + 2\xi^2 = 1 + \xi^2.$$

三角形面积为

$$A = \frac{1}{2}XY = \frac{(1 + \xi^2)^2}{2\xi}, \quad 0 < \xi < 1.$$

$$\frac{dA}{d\xi} = \frac{(1 + \xi^2)(3\xi^2 - 1)}{2\xi^2}.$$

令 $\frac{dA}{d\xi} = 0$, 得 $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 当 $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, $\frac{dA}{d\xi} < 0$; 当 $\xi > \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, $\frac{dA}{d\xi} > 0$. 所以当 $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 A 取

极小值. 由于驻点唯一, 故此时 A 也是最小值. 相应地 $\eta = 1 - \xi^2 = \frac{2}{3}$.

42 【答案】 $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right), -\frac{1}{5}$

【分析】 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 下面求 $f'(x)$ 与 $f''(x)$.

$$f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5x-2) \quad (x \neq 0)$$

$$f''(x) = \frac{1}{3} \left[5x^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(5x-2) \right]$$

$$= \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} \left(x + \frac{1}{5} \right) \begin{cases} < 0, & -\infty < x < -\frac{1}{5} \\ = 0, & x = -\frac{1}{5} \\ > 0, & -\frac{1}{5} < x < 0 \\ > 0, & 0 < x < +\infty \end{cases}$$



因此 $f(x)$ 的凸区间是 $(-\infty, -\frac{1}{5})$, 拐点的横坐标是 $x = -\frac{1}{5}$.

一元函数积分学

A 组

43 【答案】 $n+1$

【分析】 已知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = A \neq 0 (\exists)$, 求正数 k 使得 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^k} \neq 0 (\exists)$.

这是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 用洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^k} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{k(x-a)^{k-1}} \xrightarrow{\text{取 } k=n+1} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(n+1)(x-a)^n} \\ &= \frac{A}{n+1} \neq 0 (\exists) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_a^x f(t) dt$ 是 $(x-a)$ 的 $(n+1)$ 阶无穷小.

44 【答案】 6

【分析】 求 $n(>0)$ 使得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x-\sin x} \ln(1+t) dt}{x^n} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1+(x-\sin x)](1-\cos x)}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\sin x) \frac{1}{2}x^2}{nx^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{nx^{n-3}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{n(n-3)x^{n-4}} \xrightarrow{\text{取 } n=6} \frac{1}{72} \neq 0. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \ln[1+(x-\sin x)] &\sim x-\sin x \quad (x \rightarrow 0) \\ 1-\cos x &\sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

应填 $n=6$.

45 【答案】 $-\frac{2}{\sqrt{x+1}} - \frac{2}{x+1} + C$, 其中 C 为任意常数

【分析】 令 $t = \sqrt{x+1}$, 则 $x = t^2 - 1, dx = 2t dt$.

$$I = \int \frac{t+2}{t^4} \cdot 2t dt = 2 \int (t^{-2} + 2t^{-3}) dt = -\frac{2}{t} - \frac{2}{t^2} + C = -\frac{2}{\sqrt{x+1}} - \frac{2}{x+1} + C, \text{ 其中 } C \text{ 为}$$

任意常数.

46 【答案】 $F(x) = \begin{cases} -\cos x + x + 1 + C, & x > 0, \\ \arctan x + C, & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 C 为任意常数

【分析】 方法 1 记 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$, 则



当 $x > 0$ 时, $F(x) = \int (\sin x + 1) dx = -\cos x + x + C_2$;

当 $x \leq 0$ 时, $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C_1$.

因为 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数, 所以 $F(x)$ 在 $x = 0$ 点连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\arctan x + C_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\cos x + x + C_2),$$

$C_1 = C_2 - 1$. 故 $f(x)$ 的所有原函数为

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + x + 1 + C, & x > 0, \\ \arctan x + C, & x \leq 0, \end{cases} \text{ 其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

方法 2 先求 $f(x)$ 的一个原函数 $F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$.

当 $x > 0$ 时, $F_0(x) = \int_0^x (\sin t + 1) dt = -\cos t \Big|_0^x + x = 1 - \cos x + x$;

当 $x \leq 0$ 时, $F_0(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^x = \arctan x$.

于是 $f(x)$ 的全体原函数为

$$F(x) = F_0(x) + C = \begin{cases} 1 - \cos x + x + C, & x > 0, \\ \arctan x + C, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中 C 为任意常数.

47 【答案】 $\begin{cases} x + C, & x \geq -1; \\ -x^2 - x - 1 + C, & x < -1 \end{cases}$

【分析】 先写出 $|x - |x+1||$ 的分段表达式.

$$|x - |x+1|| = \begin{cases} 1, & x \geq -1, \\ -2x - 1, & x < -1. \end{cases}$$

因此,

$$\int |x - |x+1|| dx = \begin{cases} x + C_1, & x \geq -1, \\ -x^2 - x + C_2, & x < -1. \end{cases}$$

再在分界点 $x = -1$ 处拼接成连续函数, 从而

$$-1 + C_1 = -1 - (-1) + C_2,$$

从而 $C_2 = -1 + C_1$, 并记 C_1 为 C , 于是如上所填.

【评注】 被积函数连续, 所以原函数存在. 先按分段表达式分段积分, 再在分界点处拼接成连续函数. 如此拼成的函数, 在分界点处不但连续, 而且必定也是可导的, 从而使得原函数.

例如求 $\int \min\{x^2, x\} dx$ 也可以按上述办法处理.

48 【答案】 $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} - \sqrt{ax} + a \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} + C$

【分析】 方法 1 命 $\sqrt{\frac{x}{x+a}} = u$, 有 $x = \frac{au^2}{1-u^2}$.

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} dx = \int \arcsin u d\left(\frac{au^2}{1-u^2}\right)$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{au^2}{1-u^2} \arcsin u - \int \frac{au^2}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} du \\
 &= \frac{au^2}{1-u^2} \arcsin u - a \int u d \frac{1}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{au^2}{1-u^2} \arcsin u - a \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} - \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right) \\
 &= \frac{au^2}{1-u^2} \arcsin u - \frac{au}{\sqrt{1-u^2}} + a \arcsin u + C \\
 &= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} - \sqrt{ax} + a \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} + C.
 \end{aligned}$$

方法2 命 $\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} = u$, 有 $x = a \tan^2 u$.

$$\begin{aligned}
 \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} dx &= \int u d a \tan^2 u = a u \tan^2 u - a \int \tan^2 u du \\
 &= a u \tan^2 u - a \int (\sec^2 u - 1) du \\
 &= a u \tan^2 u - a \tan u + a u + C \\
 &= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} - \sqrt{ax} + a \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} + C.
 \end{aligned}$$

49

【答案】 $-\frac{1}{2}(e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C$

【分析】 命 $e^x = t$,

$$\begin{aligned}
 \int e^{-2x} \arctan e^x dx &= \int \frac{\arctan t}{t^3} dt = -\frac{1}{2} \int \arctan t d\left(\frac{1}{t^2}\right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{t^2} \arctan t - \int \frac{1}{t^2(1+t^2)} dt \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t^2} \arctan t - \int \frac{1}{t^2} dt + \int \frac{1}{t^2+1} dt \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t^2} \arctan t + \frac{1}{t} + \arctan t \right) + C \\
 &= -\frac{1}{2}(e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C.
 \end{aligned}$$

50

【答案】 $\frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{x}{x-1} \ln x + \ln |x-1| + C$

【分析】

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2-x+1}{x(x-1)^2} \ln x dx &= \int \frac{x^2-2x+1+x}{x(x-1)^2} \ln x dx \\
 &= \int \frac{1}{x} \ln x dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} \ln x dx \\
 &= \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \int \ln x d\left(\frac{1}{x-1}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{\ln x}{x-1} + \int \frac{1}{x(x-1)} dx
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{\ln x}{x-1} + \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{x}{x-1} \ln x + \ln |x-1| + C.
 \end{aligned}$$

51 【答案】 $-\frac{1}{3}$

【分析】 因 $\lim_{x \rightarrow 1} \int_1^x y(t) dt = 0$, 由洛必达法则,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x y(t) dt}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y(x)}{3(x-1)^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y'(x)}{6(x-1)}.$$

由 $y^3 + xy + x^2 - 2x + 1 = 0$ 隐函数两侧求导,

$$3y^2 y' + xy' + y + 2x - 2 = 0,$$

(*)

以 $x = 1, y(1) = 0$ 代入, 得 $y'(1) = 0$. 再用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{y'(x)}{6(x-1)} = \frac{1}{6} y''(1).$$

由(*)可得 $6y(y')^2 + 3y^2 y'' + y' + xy'' + y' + 2 = 0$. $y''(1) = -2$, 所以原式 $= -\frac{1}{3}$.

52

【答案】 $\phi'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

【分析】 对 $\int_0^1 f(xt) dt$ 作换元后, 再求 $\phi'(x)$.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 及 $f(x)$ 连续, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

当 $x = 0$ 时, $\phi(0) = \int_0^1 f(0) dx = 0$.

当 $x \neq 0$ 时, $\phi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 令 $xt = u$, 则

$$\phi(x) = \int_0^1 f(xt) dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du.$$

所以 $\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

当 $x = 0$ 时, $\phi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = 1$.

当 $x \neq 0$ 时, $\phi'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(u) du + \frac{1}{x} f(x)$.

所以 $\phi'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$



53

【答案】 $\tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}$ 【分析】 先对 $\int_1^4 f(x-2)dx$ 换元,再计算.设 $x-2=t$, $dx=dt$, 当 $x=1$ 时 $t=-1$; 当 $x=4$ 时 $t=2$.

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 f(x-2)dx &= \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+\cos t} + \int_0^2 te^{-t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \sec^2 \frac{t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-t^2} d(-t^2) \\
 &= \tan \frac{t}{2} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^2 = \tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

54

【答案】
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x < -1 \\ x-1, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

【分析】 方法1 因为

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

所以这是求分段函数的变限积分.

$$\begin{aligned}
 \text{当 } x < -1 \text{ 时, } \int_1^x f(t)dt &= \int_1^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^x f(t)dt = \int_1^{-1} 1dt + \int_{-1}^x t^2 dt \\
 &= -2 + \frac{1}{3}t^3 \Big|_{-1}^x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\text{当 } -1 \leq x \leq 1 \text{ 时, } \int_1^x f(t)dt = \int_1^x 1dt = x-1.$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } \int_1^x f(t)dt = \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}.$$

因此,

$$\int_1^x f(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x < -1 \\ x-1, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

方法2 $\int_1^x f(t)dt \stackrel{(\text{记})}{=} F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,满足 $F(1)=0$. 因而,也可用拼接法求得分段函数 $f(x)$ 的一个原函数,记为 $F_0(x)$,则有

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x < -1 \\ x+C_1, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2, & x > 1 \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 满足

$$\left. \frac{1}{3}x^3 \right|_{x=-1} = (x + C_1) \Big|_{x=-1} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}$$

$$(x + C_1) \Big|_{x=1} = \left(\frac{1}{3}x^3 + C_2 \right) \Big|_{x=1} \Rightarrow C_2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = F_0(x) + C.$$

$$\text{现定出 } C \text{ 使得 } 0 = F_0(1) + C = 1 + \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{5}{3}.$$

因此

$$\int_1^x f(t) dt = F_0(x) - \frac{5}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x < -1 \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

【评注】 若求分段函数 $f(x) = \max\{1, x^2\}$ 的不定积分 $\int f(x) dx$, 或由变限积分法先求得一个原函数 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ (这时要用分段积分法如方法 1), 然后就可得

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

或由方法 2 中的拼接法, 先求得一个原函数, 同样可得 $\int f(x) dx$. 对于多个连接点的分段函数, 也许拼接法更简便些.

55 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【分析】 方法 1
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{2x^2 - 1}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2}x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2}}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{-d\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2}} = -\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}x} \Big|_1^{+\infty}$$

$$= \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

方法 2
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{2x^2 - 1}} \xrightarrow{x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cos t}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cos t} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{4}.$$

56 【答案】 $0; \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt \right)$

【分析】 由 $f'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x = 0$, 得 $x = 0$.

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以, 极小值点为 $x = 0$, 极小值为 $f(0)$



= 0.

由 $f''(x) = 2e^{-x^4}(1-4x^4) = 0$, 得 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 时, $f''(x) < 0$, 当 $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时, $f''(x) > 0$,

因此, 拐点坐标为 $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt)$.

B 组

57 【答案】 $\frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1, \frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + C_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数

【分析】 $I_1 + I_2 = \int \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right] dx$
 $= \int \left[1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) \right] dx = \frac{3}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x + C_3,$

$I_1 - I_2 = \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_4,$

因此

$I_1 = \frac{1}{2}[(I_1 + I_2) + (I_1 - I_2)] = \frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1,$

$I_2 = \frac{1}{2}[(I_1 + I_2) - (I_1 - I_2)] = \frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + C_2$ (其中 C_1, C_2 为任意常数).

58 【答案】 $\frac{1}{9}$

【分析】 方法 1 由 $2f(x) + f(1-x) = x^2$ 可知
 $2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2.$

解方程组

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = x^2, \\ 2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2, \end{cases}$$

可得 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, 故 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{9}.$

方法 2 因为 $2f(x) + f(1-x) = x^2$, 所以

$$2 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

令 $t = 1-x$, 则 $\int_0^1 f(1-x) dx = \int_1^0 f(t)(-dt) = \int_0^1 f(x) dx$, 代入上式可得

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{9}.$$

59 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【分析】 $\sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2 + 1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{i^2 + 1}{n^2}},$ 而



$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}}.$$

由定积分的定义知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$, 且

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} - \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{(n+1)^2}{n^2}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{(n+1)^2}{n^2}} = \frac{\pi}{4},$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2 + 1} = \frac{\pi}{4}$.

难吗? 不会做? 可以看
《考研数学复习全书·基础篇·
高等数学基础》第三章

60

【答案】 $\frac{1}{2\sqrt{2}-1}$

【分析】

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{\sum_{k=1}^n \sqrt{n+k}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k}}{\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{n+k}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}}} = \frac{\int_0^1 \sqrt{x} dx}{\int_0^1 \sqrt{1+x} dx} = \frac{1}{2\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$

61

【答案】 4

【分析】 $\int_0^{2\pi} |\sin^2 x - \cos^2 x| dx = \int_0^{2\pi} |\cos 2x| dx$

$$= 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos 2x| dx \quad (|\cos 2x| \text{ 以 } \frac{\pi}{2} \text{ 为周期})$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos 2x| dx \quad (|\cos 2x| \text{ 为偶函数})$$

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = 4.$$

62

【答案】 $\ln 2$

【分析】 方法 1 $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+e^{-x}} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{dx}{1+e^{-x}} \right)$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(1+e^x) \Big|_0^b \right]$$



$$= \ln 2 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right].$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right] &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-b}} \left[b - (1+e^{-b}) \ln(e^b + 1) \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln e^b - (1+e^{-b}) \frac{\ln(1+e^b)}{e^b} \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{e^b}{e^b + 1} - \frac{\ln(1+e^b)}{e^b} \right] \\ &= \ln 1 - 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right] &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b(1+e^{-b} - e^{-b})}{1+e^{-b}} - \ln[e^b(1+e^{-b})] \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[b - \frac{be^{-b}}{1+e^{-b}} - b - \ln(1+e^{-b}) \right] \\ &= 0 - \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{因此} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \ln 2.$$

方法2 作恒等变形后,对无穷积分作分部积分.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x de^x}{(e^x+1)^2} \\ &= - \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{e^x+1}\right) = - \frac{x}{e^x+1} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1} \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{de^{-x}}{1+e^{-x}} = - \ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2. \end{aligned}$$

$$\text{【评注】} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

但不可对它直接用分部积分公式,因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+e^{-x}} = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}} \text{ 发散.}$$

因此方法1中,先对 $\int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$ 用分部积分,然后再求

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right).$$

63 【答案】 $\sqrt{5} + \sqrt{7}$

$$\begin{aligned} \text{【分析】} \quad \int_2^4 \frac{x dx}{\sqrt{|x^2-9|}} &= \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{-x^2+9}} dx + \int_3^4 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_2^3 \frac{d(9-x^2)}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{2} \int_3^4 \frac{d(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}} \\ &= -\frac{1}{2} \times 2 \sqrt{9-x^2} \Big|_2^3 + \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{x^2-9} \Big|_3^4 \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{7}. \end{aligned}$$



64 【答案】 $\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$

【分析】 这是反常积分, 可以像定积分那样作积分变量变换处理.

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}} = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{(x-1)^2-1}},$$

为消除根号, 命 $x-1 = \sec t, (x-1)^2-1 = \sec^2 t-1 = \tan^2 t$. 当 $x=3$ 时, $\sec t=2, t=\frac{\pi}{3}$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$. 从而

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{(x-1)^2-1}} &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t dt}{\sec^4 t |\tan t|} \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \cos t dt \\ &= \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

65 【答案】 $7\pi^2 a^3$

【分析】 该曲线可表为 $y = y(x) (0 \leq x \leq 2\pi a)$.

先求出摆线和直线 $y = 2a, x = 0, x = 2\pi a$ 所围平面图形绕 $y = 2a$ 旋转一周所成旋转体的体积 V_1 .

任取 $[x, x+dx] \subset [0, 2\pi a]$, 对应的小窄条相应的体积微元

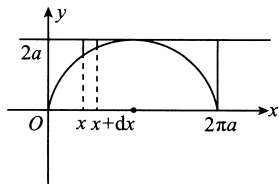
$$dV_1 = \pi[2a - y(x)]^2 dx$$

于是

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{2\pi a} (2a - y)^2 dx \\ &\stackrel{x = a(t - \sin t)}{=} \pi \int_0^{2\pi} [2a - a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 (1 - \cos t) dt \\ &= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^4 \frac{t}{2} \sin^2 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \cos^4 s (1 - \cos^2 s) ds \\ &= 16\pi a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 s (1 - \cos^2 s) ds \\ &= 32\pi a^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 s ds - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 s ds \right) \\ &= 32\pi a^3 \left(\frac{3 \times 1}{4 \times 2} - \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \right) \times \frac{\pi}{2} = \pi^2 a^3. \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t)(1 + \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= \pi a^3 \left[2\pi - \pi - \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d\sin t \right] = \pi^2 a^3. \end{aligned}$$



因此, $V = \pi(2a)^2 2\pi a - \pi^2 a^3 = 7\pi^2 a^3$.

66 【答案】 $-\frac{\pi}{2}a^2 \ln 3$

【分析】 $I = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx - \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln 3 dx$.

由于 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 是奇函数, 所以

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = 0$$

由定积分的几何意义 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}a^2$ (半径为 a 的半圆的面积), 所以

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{3} dx = -\frac{1}{2}\pi a^2 \ln 3.$$

【评注】 计算在对称区间上的定积分时, 要注意被积函数的奇偶性. 利用 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ 是圆面积的 $\frac{1}{4}$ 的几何意义会迅速得出正确答案.

67 【答案】 $2A$

【分析】 $\int_0^{2T} f(3x+T) dx = \int_0^{2T} f(3x) dx \xrightarrow{t=3x} \frac{1}{3} \int_0^{6T} f(t) dt$
 $= \frac{1}{3} \cdot 6 \int_0^T f(t) dt = 2A.$

68 【答案】 $\frac{\pi^2}{2}$

【分析】 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$, 则该曲线有唯一渐近线 $y = 1$, 所求旋转体体积为

$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx$$

$$\xrightarrow{x = \tan t} 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t}{\sec^4 t} dt = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi^2}{2}.$$

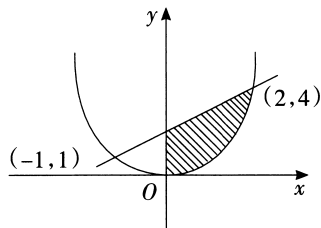
69 【答案】 $\frac{16}{3}\pi$

【分析】 由图可见, 实际只要求如图阴影部分绕 y 轴旋转一周所成的体积即可. 求出交点坐标为 $(-1, 1)$ 与 $(2, 4)$. 由旋转体体积公式, 所求体积

$$V = \int_0^4 \pi x_2^2 dy - \int_2^4 \pi x_1^2 dy,$$

前一积分 $x_2^2 = y$, 后一积分 $x_1^2 = (y-2)^2$. 于是

$$V = \pi \int_0^4 y dy - \pi \int_2^4 (y-2)^2 dy = \frac{16}{3}\pi.$$



70

【答案】 $\frac{(b-a)^6}{60}$ 【分析】 作换元 $x = a + t(b-a)$, 则有

$$\begin{aligned}
 \int_a^b (x-a)^2 (b-x)^3 dx &= \int_0^1 t^2 (b-a)^2 (1-t)^3 (b-a)^3 (b-a) dt \\
 &= (b-a)^6 \int_0^1 t^2 (1-t)^3 dt \\
 &= (b-a)^6 \int_0^1 (1-t)^2 t^3 dt \\
 &= (b-a)^6 \int_0^1 (t^5 - 2t^4 + t^3) dt \\
 &= (b-a)^6 \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right) \\
 &= \frac{(b-a)^6}{60}.
 \end{aligned}$$

【评注】 其中 $\int_0^1 t^2 (1-t)^3 dt = \int_0^1 (1-t)^2 t^3 dt$ 是因为 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ (区间再现公式).

微分方程(差分方程)

A 组

71

【答案】 $y = x \tan(\ln x)$

【分析】 曲线 $y = y(x)$ 在点 (x, y) 处切线的斜率即函数 $y = y(x)$ 在点 x 处的导数 y' , 由题设知函数 $y(x)$ 是如下微分方程初值问题的特解:

$$\begin{cases} y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

这是齐次方程, 设 $u = \frac{y}{x}$ 即 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$ 可将以上问题化为 $u(x)$ 满足的可分离变量类型的初值问题

$$\begin{cases} x \frac{du}{dx} + u = 1 + u + u^2 \\ u(1) = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{(分离变量)}} \begin{cases} \frac{du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

求积分即得方程的通解 $\arctan u = \ln x + C$, 由 $u(1) = 0$ 可确定常数 $C = 0$, 故上述初值问题的解是

$$\arctan u = \ln x \Leftrightarrow \arctan \frac{y}{x} = \ln x \Leftrightarrow y = x \tan(\ln x).$$

【评注】 严格地讲所求曲线的方程应是 $y = x \tan(\ln x) (e^{-\frac{\pi}{2}} < x < e^{\frac{\pi}{2}})$, 这是由于当 $x \in (e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$ 时 $y = x \tan(\ln x)$ 的图象才是一条通过点 $(1, 0)$ 的连续可微曲线.



72 【答案】 $x = y^2(Ce^{\frac{1}{y}} + 1)$, C 为任意常数

【分析】 当 $y > 0$ 时方程可改写为 $\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y}\right)x = 1$, 这是以 y 为自变量, x 为未知函数的一阶线性微分方程.

两边乘 $\mu(y) = e^{\int(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y})dy} = e^{-\frac{1}{y} - 2\ln y} = \frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}$ 得

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}x\right) = \frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}$$

积分得 $\frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}x = \int \frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}dy + C = e^{-\frac{1}{y}} + C$

通解为 $x = y^2e^{\frac{1}{y}}(C + e^{-\frac{1}{y}}) = y^2(Ce^{\frac{1}{y}} + 1)$, 其中 C 是任意常数.

【评注】 此题给我们的启示是: 在解微分方程时, 变量 x, y 地位可看作相同的, 既可将 y 看作 x 的函数, 又可将 x 看作 y 的函数.

73 【答案】 $y = \tan\left[\frac{1}{2}(1+x)^2 + C\right]$

【分析】 由 $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ 知

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y^2)$$

则

$$\frac{dy}{1+y^2} = (1+x)dx,$$

$$\arctan y = \frac{1}{2}(1+x)^2 + C,$$

$$y = \tan\left[\frac{1}{2}(1+x)^2 + C\right]$$

74 【答案】 $\tan \frac{y}{2x} = Cx$

【分析】 由 $xy' - x\sin \frac{y}{x} - y = 0$ 知

$$y' - \sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = 0$$

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = xu, y' = u + xu', u + xu' - \sin u - u = 0$

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}, \frac{du}{2\sin \frac{u}{2}\cos \frac{u}{2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d\tan \frac{u}{2}}{\tan \frac{u}{2}} = \int \frac{dx}{x}, \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| = \ln |x| + \ln C,$$

$$\tan \frac{u}{2} = Cx, \tan \frac{y}{2x} = Cx.$$



75 【答案】 $y = \frac{1}{x^2}(\sin x - x \cos x)$

【分析】 由 $xy' + 2y = \sin x$ 知

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

由通解公式知,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(\int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right) = \frac{1}{x^2} \left(\int x \sin x dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x^2} (\sin x - x \cos x + C) \end{aligned}$$

由 $y|_{x=\pi} = \frac{1}{\pi}$ 知 $C = 0$.

76 【答案】 $(x + C) \cos x$

【分析】 本题所给方程是一阶线性方程. 由线性方程通解公式得

$$y = e^{-\int \tan x dx} \left(\int \cos x \cdot e^{\int \tan x dx} dx + C \right) = (x + C) \cos x.$$

77 【答案】 $x = \frac{y^4}{3} \ln y - \frac{y^4}{9} + Cy$

【分析】 以 y 为自变量, 将原方程变形为

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = y^3 \ln y,$$

这是一阶线性微分方程, 其通解为

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left(\int y^3 \ln y \cdot e^{\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right) \\ &= y \left(\int y^2 \ln y dy + C \right) = y \left(\frac{1}{3} \int \ln y dy^3 + C \right) \\ &= y \left[\frac{1}{3} \left(y^3 \ln y - \int y^3 d \ln y \right) + C \right] = y \left[\frac{1}{3} \left(y^3 \ln y - \frac{y^3}{3} \right) + C \right] \\ &= \frac{y^4}{3} \ln y - \frac{y^4}{9} + Cy. \end{aligned}$$

78 【答案】 $e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1)$, 其中 C_1 与 C_2 是两个任意常数

【分析】 特征方程为 $r^2 - 2r + 2 = 0$, 解得 $r_{1,2} = 1 \pm i$, 则对应齐次方程的通解为

$$Y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

原方程有形如 $y^* = Ae^x$ 的特解, 代入原方程可得 $A = 1$, 所以原方程通解为

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1).$$

B 组

79 【答案】 $x = y \left(\frac{1}{3} y^3 + C \right)$

【分析】 将方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^4}$ 变形得



$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^4}{y}$$

即 $\frac{dx}{dy} - x \cdot \frac{1}{y} = y^3$. 这是一阶线性方程, 由线性方程通解公式得

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \frac{1}{y} dy} \left(\int y^3 \cdot e^{-\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right) = y \left(\int y^2 dy + C \right) \\ &= y \left(\frac{1}{3} y^3 + C \right). \end{aligned}$$

80

【答案】 $(x^2 + 2)e^x + e^{-2x}$

【分析】 题设二阶常系数线性微分方程的特征方程是 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 特征根是 $\lambda_1 = 1$ 与 $\lambda_2 = -2$. 从而对应的齐次线性微分方程有线性无关的两个特解 e^x 与 e^{-2x} , 且对应于方程非齐次项 $f(x) = (6x+2)e^x$, 可考虑非齐次微分方程具有形为 $y^* = x(Ax+B)e^x = (Ax^2+Bx)e^x$ 的特解.

把 $y^* = (Ax^2+Bx)e^x$, $(y^*)' = (Ax^2+Bx+2Ax+B)e^x$ 与 $(y^*)'' = (Ax^2+Bx+4Ax+2B+2A)e^x$ 代入方程可得

$$(y^*)'' + (y^*)' - 2y^* = [3(2Ax+B) + 2A]e^x \stackrel{\text{令}}{=} (6x+2)e^x$$

可确定常数 $A=1, B=0$, 故非齐次方程具有特解 $y^* = x^2 e^x$.

按通解结构定理, 应设通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x^2 e^x$, 其中 C_1 与 C_2 是两个任意常数. 利用初值 $y(0) = 3$ 和 $y'(0) = 0$ 可得

$$\begin{cases} y(0) = (C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x^2 e^x) \Big|_{x=0} = C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) = [C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} + (x^2 + 2x)e^x] \Big|_{x=0} = C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases}$$

解之即得 $C_1 = 2, C_2 = 1$. 故所求特解 $y^* = (x^2 + 2)e^x + e^{-2x}$.

81

【答案】 $\frac{1}{n^2}(2ma+b)$

【分析】 $y'' + 2my' + n^2 y = 0$ 的特征方程 $\lambda^2 + 2m\lambda + n^2 = 0$ 的特征根是

$$\lambda_1 = -m + \sqrt{m^2 - n^2} = -(m - \sqrt{m^2 - n^2}) < 0, \lambda_2 = -m - \sqrt{m^2 - n^2} < 0.$$

由此可见微分方程的任何一个解 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 都满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$.

又因 $y' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$, 从而又有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y' = 0$. 故对于特解 $y = y(x)$ 满足 $y(0) = a$, $y'(0) = b$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} [y''(x) + 2my'(x) + n^2 y(x)] dx \\ &= y'(x) \Big|_0^{+\infty} + 2my(x) \Big|_0^{+\infty} + n^2 \int_0^{+\infty} y(x) dx \\ &= -y'(0) - 2my(0) + n^2 \int_0^{+\infty} y(x) dx \\ &= -(2ma+b) + n^2 \int_0^{+\infty} y(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{即 } \int_0^{+\infty} y(x) dx = \frac{1}{n^2}(2ma+b).$$



82 【答案】 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$

【分析】 $y_1 - y_3 = e^{-x}$ 与 $y_1 - y_2 = e^{2x} - e^{-x}$ 都是对应齐次方程的解, $(y_1 - y_3) + (y_1 - y_2) = e^{2x}$ 也是对应齐次方程的解, e^{-x} 与 e^{2x} 是对应齐次方程两个线性无关的特解; 而 $y_2 - e^{-x} = xe^x$ 是非齐次方程的解.

下面求该微分方程:

方法 1 由 e^{-x}, e^{2x} 是对应齐次方程线性无关的两个解知 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ 是特征方程的两个根, 从而特征方程为 $(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$ 即 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, 故对应齐次微分方程为

$$y'' - y' - 2y = 0$$

设所求非齐次方程为 $y'' - y' - 2y = f(x)$, 把非齐次解 xe^x 代入, 使得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2(xe^x) = (1 - 2x)e^x$$

于是所求方程为 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$.

方法 2 由前面求得该微分方程的一个特解 xe^x 及相应的齐次方程两个线性无关的解: e^{-x}, e^{2x} , 于是该微分方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x$, 求出

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} + (x+1)e^x, y'' = C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{2x} + (x+2)e^x$$

消去 C_1, C_2

$$y'' - y' = 2(C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x) - 2xe^x + e^x = 2y + (1 - 2x)e^x$$

使得微分方程 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$.

83 【答案】 $y'' - 2y' + 2y = 0$

【分析】 由 $y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ 为某齐次方程的通解知, 该齐次方程的特征方程有一对共轭复根 $1 \pm i$, 从而特征方程为

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

所求方程为

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

84 【答案】 $y'' + 4y = \sin 2x$

【分析】 由二阶线性微分方程解的叠加原理可知, $y_1 - y_2 = \cos 2x - \sin 2x$ 是该方程对应的齐次方程[记为(*)]的一个解, 于是 $\cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) = \sin 2x$ 也是方程(*)的解, 即(*)有两个线性无关的解 $\cos 2x$ 和 $\sin 2x$, 由此可见该方程的特征根为 $\pm 2i$, 特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0$, 从而知原方程为 $y'' + 4y = f(x)$.

注意到 $-\frac{x}{4}\cos 2x$ 是这个方程的一个解, 从而 $f(x) = \left(-\frac{1}{4}x\cos 2x\right)'' + 4\left(-\frac{1}{4}x\cos 2x\right) = \sin 2x$ 因此, 该方程为 $y'' + 4y = \sin 2x$.

【评注】 原题中给出某二阶线性常系数非齐次方程有两个特解 y_1 与 y_2 , 其实只要给出其中的一个, 其余条件不变, 仍可求出同样的结果.

由所求的二阶线性常系数非齐次方程相应的齐次方程有特解 $y_3 = \cos 2x$, 相应的特征根一定是 $\lambda = \pm 2i$ (还有另一线性无关解 $y_4 = \sin 2x$), 于是相应的特征方程是 $\lambda^2 + 4 = 0$, 从而原方程为

$$y'' + 4y = f(x).$$

再由叠加原理知, $y^* = -\frac{1}{4}x\cos 2x$ 是原方程的特解, 将它代入上述方程就可求出

$$f(x) = \sin 2x.$$



85 【答案】 $y = 2 + e^{-x}$

【分析】 方程 $y''' - y' = 0$ 的特征方程为

$$r^3 - r = 0$$

即 $r(r^2 - 1) = 0$, $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = -1$. 则原方程通解为

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

由初始条件得

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2 + C_3 \\ -1 = C_2 - C_3 \\ 1 = C_2 + C_3 \end{cases}$$

解得 $C_2 = 0, C_3 = 1, C_1 = 2$. 故

$$y = 2 + e^{-x}.$$

多元函数微分学

A 组

86 【答案】 0

【分析】 由于 $0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \rightarrow 0$, 由夹逼原理知

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

难吗? 不会做? 可以看
《考研数学复习全书·基础篇·
高等数学基础》第五章

87 【答案】 0

【分析】 由于 $0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| |x| \leq |x| \rightarrow 0$, 由夹逼原理知

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

则 $a = 0$.

88 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})},$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{y}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{1}{2}.$$

89 【答案】 2

【分析】 由 $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{e^{xy} + xy \sqrt{x^2 + y^2}}$ 知, $f(x, 0) = x^2$, 则



$$f'_x(1,0) = 2x|_{x=1} = 2.$$

90 【答案】 $\frac{\pi(2+\pi)}{(1+\pi)^2}$

【分析】 按一、二阶偏导数的定义直接计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x+y} - y\cos(xy) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{(x+y)^2} - \cos(xy) + xy\sin(xy)\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,\pi)} &= -\frac{1}{(1+\pi)^2} - \cos \pi + \pi \sin \pi \\ &= 1 - \frac{1}{(1+\pi)^2} = \frac{\pi(2+\pi)}{(1+\pi)^2}.\end{aligned}$$

91 【答案】 $e^{xy} + xy e^{xy} + f''_{11} + (x+y)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2$

【分析】 由 $z = e^{xy} + f(x+y, xy)$ 知

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= ye^{xy} + f'_1 + yf'_2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= e^{xy} + xy e^{xy} + f''_{11} + xf''_{12} + f'_2 + yf''_{21} + xyf''_{22} \\ &= e^{xy} + xy e^{xy} + f''_{11} + (x+y)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2.\end{aligned}$$

92 【答案】 $-\frac{1}{3}(dx+2dy)$

【分析】 方法 1 将 $x=0, y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$, 则 $z=0$.

将方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 两端微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx+2dy+3dz) + yzdx + xzdy + xydz = 0$$

将 $x=0, y=0, z=0$ 代入上式得

$$dx+2dy+3dz=0$$

$$\text{则 } dz \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx+2dy).$$

方法 2 将 $x=0, y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$, 则 $z=0$.

由隐函数求导公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{x+2y+3z} + yz}{3e^{x+2y+3z} + xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2e^{x+2y+3z} + xz}{3e^{x+2y+3z} + xy}$$

$$\text{将 } x=0, y=0, z=0 \text{ 代入上式得 } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,0)} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{则 } dz \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx+2dy).$$

方法 3 将 $x=0, y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$, 则 $z=0$.

将 $y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{x+3z} = 1$, 该式两端对 x 求导得



$$e^{x+3z}(1+3z'_x)=0$$

将 $x=0, z=0$ 代入上式得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}$, 同理可得 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{2}{3}$.

$$\text{则 } dz\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}(dx+2dy).$$

【评注】 对于隐函数求具体点偏导数和全微分, 仍然可采用先代后求的方法, 即方法 3. 如果本题改为:

若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+\frac{xyz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}=1$ 确定, 则 $dz\Big|_{(0,0)}=$ _____.

此方法的优越性更加明显.

93 【答案】 $-(dx+dy)$

【分析】 方法 1 由方程 $x^2+y^2+z^2=3$ 及公式

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

知 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$, 则

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-1, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=-1$$

则 $dz|_{(1,1,1)}=-(dx+dy)$.

方法 2 等式 $x^2+y^2+z^2=3$ 两端求微分得

$$2xdx+2ydy+2zdz=0$$

则 $dz=-\frac{xdx+ydy}{z}, dz|_{(1,1,1)}=-(dx+dy)$.

94 【答案】 $-\frac{1}{e}$

【分析】 $f'_x=2x(2+y^2), f'_y=2x^2y+\ln y+1$.

令 $\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases}$, 解得驻点 $(0, \frac{1}{e})$.

$$A=f''_{xx}\left(0, \frac{1}{e}\right)=2(2+y^2)\Big|_{(0, \frac{1}{e})}=2\left(2+\frac{1}{e^2}\right)$$

$$B=f''_{xy}\left(0, \frac{1}{e}\right)=4xy\Big|_{(0, \frac{1}{e})}=0$$

$$C=f''_{yy}\left(0, \frac{1}{e}\right)=\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Big|_{(0, \frac{1}{e})}=e$$

所以 $AC-B^2=2e\left(2+\frac{1}{e^2}\right)>0, A>0$, 则 $f\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值, 极小值为

$$f\left(0, \frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}.$$



B 组

95 【答案】 -2 **【分析】** 由题设知 $f(0,0) = 0$, 且

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) + 3x - 4y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{f(x,y) + 3x - 4y}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \right] = 0,$$

则 $f(x,y) + 3x - 4y = o(\sqrt{x^2 + y^2})$, 即

$$f(x,y) - f(0,0) = -3x + 4y + o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

由全微分的定义知 $f'_x(0,0) = -3, f'_y(0,0) = 4$. 从而 $2f'_x(0,0) + f'_y(0,0) = -2$.**96** 【答案】 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **【分析】** $z(x,1) = \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 2}}\right)^{\sqrt{x^2 + 1}}$.令 $z(x,1) = \varphi(x)$, 则

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,1)} = \varphi'(0)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 2}}\right)^{\sqrt{x^2 + 1}} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 2}} \cdot \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

知识点链接

《考研数学复习全书·基础篇·
高等数学基础》第五章**97** 【答案】 xy **【分析】** 将题设的方程看成关于自变量 x, y 的恒等式并求一阶全微分即得

$$\begin{aligned} 0 &= F'_1 \cdot \left(dx + \frac{1}{y} dz - \frac{z}{y^2} dy\right) + F'_2 \cdot \left(dy + \frac{1}{x} dz - \frac{z}{x^2} dx\right) \\ &= \left(F'_1 - \frac{z}{x^2} F'_2\right) dx + \left(F'_2 - \frac{z}{y^2} F'_1\right) dy + \left(\frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2\right) dz \\ &= \frac{1}{x^2} (x^2 F'_1 - z F'_2) dx + \frac{1}{y^2} (y^2 F'_2 - z F'_1) dy + \frac{1}{xy} (x F'_1 + y F'_2) dz. \end{aligned}$$

由此可解出隐函数 $z = z(x, y)$ 的一阶全微分

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{xy}{x^2} \frac{(x^2 F'_1 - z F'_2)}{(x F'_1 + y F'_2)} dx - \frac{xy}{y^2} \frac{(y^2 F'_2 - z F'_1)}{(x F'_1 + y F'_2)} dy \\ &= \frac{y(z F'_2 - x^2 F'_1)}{x(x F'_1 + y F'_2)} dx + \frac{x(z F'_1 - y^2 F'_2)}{y(x F'_1 + y F'_2)} dy. \end{aligned}$$

故

$$z - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z - \frac{y(z F'_2 - x^2 F'_1)}{x F'_1 + y F'_2} - \frac{x(z F'_1 - y^2 F'_2)}{x F'_1 + y F'_2} = xy.$$



98

【答案】 $dz = \frac{yz e^{-x^2 y^2 z^2} - 1}{1 - xye^{-x^2 y^2 z^2}} dx + \frac{xz e^{-x^2 y^2 z^2} - 1}{1 - xye^{-x^2 y^2 z^2}} dy$

【分析】 将方程两端求一阶全微分,得

$$dx + dy + dz = e^{-x^2 y^2 z^2} d(xyz) = e^{-x^2 y^2 z^2} (yz dx + xz dy + xy dz),$$

由此可得

$$(1 - xye^{-x^2 y^2 z^2}) dz = (yz e^{-x^2 y^2 z^2} - 1) dx + (xz e^{-x^2 y^2 z^2} - 1) dy,$$

从而

$$dz = \frac{yz e^{-x^2 y^2 z^2} - 1}{1 - xye^{-x^2 y^2 z^2}} dx + \frac{xz e^{-x^2 y^2 z^2} - 1}{1 - xye^{-x^2 y^2 z^2}} dy.$$

【评注】 也可以把 dz 写成如下形式:

$$dz = \frac{yz - e^{x^2 y^2 z^2}}{e^{x^2 y^2 z^2} - xy} dx + \frac{xz - e^{x^2 y^2 z^2}}{e^{x^2 y^2 z^2} - xy} dy.$$

99

【答案】 $2dx - dy$

【分析】 由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 0$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} [f(x, y) - 2x + y - 2] = 0$$

又 $f(x, y)$ 连续, 则

$$f(0, 1) - 0 + 1 - 2 = 0$$

$$f(0, 1) = 1$$

从而有 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - f(0, 1) - 2x + (y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$. 即

$$f(x, y) - f(0, 1) = 2x - (y-1) + o(\sqrt{x^2 + (y-1)^2})$$

由微分定义知 $f(x, y)$ 在 $(0, 1)$ 处可微, 且

$$f'_x(0, 1) = 2, f'_y(0, 1) = -1$$

$$dz \Big|_{(0, 1)} = 2dx - dy.$$

100

【答案】 $b dx + c dy$

【分析】 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $\ln(1 + x^2 + y^2) \sim x^2 + y^2$, 由求极限的等价无穷小因子替换得

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - a - bx - cy}{x^2 + y^2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - a - bx - cy] = 0, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = a$$

又由 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续即得 $f(0, 0) = a$. 再由极限与无穷小的关系可知

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - bx - cy}{x^2 + y^2} = 1 + o(1) \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0))$$

($o(1)$ 为当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时的无穷小量) $\Rightarrow$

$$f(x, y) - f(0, 0) - bx - cy = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) \cdot o(1) = o(\rho)$$



($\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$) 即

$$f(x, y) - f(0, 0) = bx + cy + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0)$$

由可微性概念 $\Rightarrow$

$$df(x, y) \Big|_{(0,0)} = bdx + cdy.$$

101 【答案】 大; (1, 1); 6

【分析】 按隐函数微分法求偏导数.

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 2 - 4 \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-x}{z-2} \quad (1)$$

由 x, y 的对称性知

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-y}{z-2} \quad (2)$$

由 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 得唯一驻点 $(x, y) = (1, 1)$.

将 $(x, y) = (1, 1)$ 代入方程中得到

$$z^2 - 4z - 12 = 0, (z-6)(z+2) = 0$$

由于 $z > 0 \Rightarrow z(1, 1) = 6$.

为判断 $(1, 1)$ 是否是极值点, 进一步求 $z(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 处的二阶偏导数.

注意 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 0$. 由 (1) 式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-(z-2) - (1-x) \frac{\partial z}{\partial x}}{(z-2)^2}, A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{z-2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{4}$$

同样由 (1) 式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x-1) \frac{\partial z}{\partial y}}{(z-2)^2}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = 0$$

由 (2) 式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-(z-2) - (1-y) \frac{\partial z}{\partial y}}{(z-2)^2}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{z-2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{4}$$

于是在 $(1, 1)$ 处 $AC - B^2 = \frac{1}{16} > 0, A = -\frac{1}{4} < 0$, $(1, 1)$ 是 $z(x, y)$ 的极大值点, 相应的极大值是 6.

102 【答案】 0; 400

【分析】 首先求 $f(x, y)$ 在区域 D 内的驻点及至少有一个偏导数不存在的点处的函数值. 由于 f 在 D 内可导, 因而不存在偏导数不存在的点. 令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$, 可得 f 在 D 内有且仅有一个驻点 $(0, 0)$, 且 $f(0, 0) = 0$.

其次求 $f(x, y)$ 在区域 D 的边界 $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 200$ 上的最大值与最小值, 这是求函



数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 200 = 0$ 之下的最值问题, 用拉格朗日乘数法, 引入拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 + 8x - 6y - 200)$, 求 $F(x, y, \lambda)$ 的驻点, 令

$$\begin{cases} F'_x = 2x + \lambda(2x + 8) = 0 & \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_y = 2y + \lambda(2y - 6) = 0 & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_\lambda = x^2 + y^2 + 8x - 6y - 200 = 0 & \text{③} \end{cases}$$

由于当 $\lambda = 0$ 时由 ①, ② 分别得到 $x = 0, y = 0$ 不可能满足条件 ③, 因而 $\lambda \neq 0$. 由 ①, ② 消去 λ 即得

$$\frac{2x+8}{2x} = \frac{2y-6}{2y} \Leftrightarrow \frac{4}{x} = -\frac{3}{y}.$$

把 $x = -\frac{4}{3}y$ 代入方程 ③ 可得

$$\frac{25}{9}y^2 - \frac{150}{9}y - 200 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 6y - 72 = 0.$$

进而可解出 $y_1 = 12, y_2 = -6$, 对应的 $x_1 = -16, x_2 = 8$, 即共有两个驻点 $(-16, 12)$ 与 $(8, -6)$.

比较 $f(0, 0) = 0, f(-16, 12) = 400, f(8, -6) = 100$, 可见函数 $f(x, y)$ 在 D 上的最小值为 $f(0, 0) = 0$, 最大值为 $f(-16, 12) = 400$.

【评注】 本题的几何意义是在区域 D 上求与原点距离最近与距离最远的点. 由于 D 的边界是圆 $C: (x+4)^2 + (y-3)^2 = 15^2$, 可见坐标原点 $(0, 0)$ 在 D 内, 显然它就是 D 上与原点距离最近的点. 而点 $(-16, 12)$ 与 $(8, -6)$ 是圆 C 过原点 $(0, 0)$ 的直径与圆 C 的两个交点. 由几何意义知它们分别是圆 C 上(即 D 的边界上)与原点 $(0, 0)$ 距离最远与距离最近的点. 从而 $(-16, 12)$ 是 D 上与原点 $(0, 0)$ 距离最远的点.

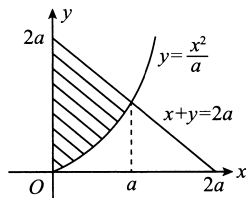
二重积分

A 组

103 【答案】 $\int_0^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} f(x, y) dy$

【分析】 由题设知, 对应的二重积分域由 $y = \frac{x^2}{a}, x+y=2a$ 及 y 轴所围成(如右图), 按先 y 后 x 重新定限得

$$\text{原式} = \int_0^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} f(x, y) dy.$$



104 【答案】 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$

【分析】 由题设知对应的二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的积分区域 $D = D_1 \cup D_2$, 且

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\},$$

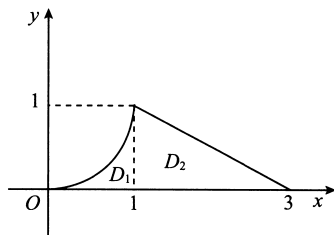
$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}(3-x)\},$$



画出积分区域 D 如图所示. 由此可见在区域 D 中最高点的纵坐标为 1, 最低点的纵坐标为 0, 左边界的方程是 $x = \sqrt{y}$, 右边界的方程是 $x = 3 - 2y$, 从而积分区域 D 又可表示成

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 3 - 2y\}.$$

故交换积分次序得 $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$.



【评注】 二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 可化为累次积分 $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ 或 $\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$.

累次积分的基本特点是外层积分限为常数, 内层积分限为函数, 而且积分上限总是不小于积分下限.

105

【答案】 $\int_0^1 dy \int_0^{2\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx$

【分析】 首先画出积分域的草图, 然后按照先 x 后 y 定限便得结果.

106

【答案】 $2 - \frac{\pi}{2}$

【分析】 本题在直角坐标下不易计算, 利用极坐标计算.

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 (\cos\theta + \sin\theta) dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta) d\theta - \frac{\pi}{2} \\ &= 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

107

【答案】 $-\frac{1}{9}(2\sqrt{2}-1)$

【分析】 交换积分次序得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 dx \int_x^1 xy \sqrt{1+y^3} dy &= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 xy \sqrt{1+y^3} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 y^2 \sqrt{1+y^3} dy = -\frac{1}{9}(2\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

108

【答案】 2π

【分析】 本题直接用直角坐标或极坐标都不易计算, 应考虑平移加极坐标, 或奇偶性的平移.

方法 1 令 $x = 1 + r\cos\theta, y = 1 + r\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (1 + r\cos\theta)(1 + r\sin\theta) r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (1 + r\cos\theta + r\sin\theta + r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr \end{aligned}$$



$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr = 2\pi.$$

方法2 由于区域 D 关于 $x=1, y=1$ 都对称, 则

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \iint_D [(xy-x)+x] dx dy \\ &= \iint_D [x(y-1)+(x-1)+1] dx dy \\ &= \iint_D 1 dx dy = 2\pi. \end{aligned}$$

109 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【分析】 由于 $2y$ 是 y 的奇函数, 而积分域 $x^2+y^2 \leq 1$ 关于 x 轴对称, 则

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 2y d\sigma &= 0 \\ \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 d\sigma &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2) d\sigma \quad (\text{变量的对称性}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

110 【答案】 $1 - \sin 1$

【分析】 交换积分次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx \\ &= \int_0^1 (1-y) \sin y dy \\ &= 1 - \sin 1. \end{aligned}$$

111 【答案】 $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

【分析】 交换积分次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}} dy = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

B 组

112 【答案】 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{8}(1 - e^{-R^2})$

【分析】 I 是二重积分 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$ 的累次积分, 其中

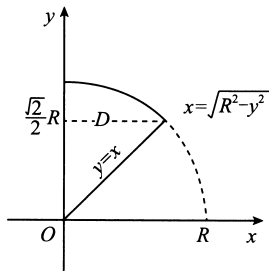


$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}R, 0 \leq x \leq y \right\} \cup \left\{ (x, y) \mid \frac{\sqrt{2}}{2}R \leq y \leq R, 0 \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2} \right\}, D \text{ 如图所示.}$$

应作极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 可得

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq r \leq R, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\text{于是 } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{8} (1 - e^{-R^2}).$$



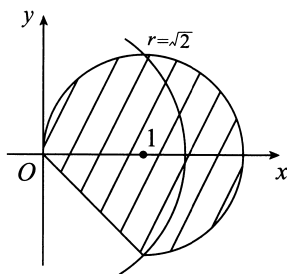
113

【答案】 $\int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{-\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}}^{\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta +$

$$\int_{\sqrt{2}}^2 r dr \int_{-\arccos \frac{r}{2}}^{\arccos \frac{r}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$$

【分析】 由原题知, 积分域如图所示, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{-\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}}^{\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta + \\ &\quad \int_{\sqrt{2}}^2 r dr \int_{-\arccos \frac{r}{2}}^{\arccos \frac{r}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta. \end{aligned}$$



114

【答案】 $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$

【分析】 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 dr = \frac{\sqrt{2}\pi}{6}.$

115

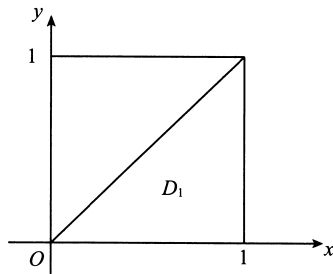
【答案】 $2\ln(1 + \sqrt{2})$

【分析】 由于区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \iint_{D_1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

其中区域 D_1 如右图, 为下半三角形区域, 则

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos \theta} \\ &= 2 \ln(\sec \theta + \tan \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$



116

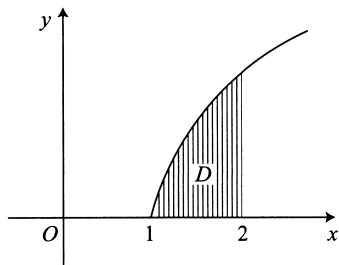
【答案】 $\ln 2$

【分析】 由题设知积分区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \ln x\}$, 从而

$$\iint_D \frac{e^{xy}}{x^x - 1} d\sigma = \int_1^2 dx \int_0^{\ln x} \frac{e^{xy}}{x^x - 1} dy$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 \frac{dx}{x^x - 1} \int_0^{\ln x} e^{xy} dy \\
 &= \int_1^2 \frac{dx}{x(x^x - 1)} \int_0^{\ln x} e^{xy} d(xy) \\
 &= \int_1^2 \frac{e^{xy}}{x(x^x - 1)} \Big|_{y=0}^{y=\ln x} dx \\
 &= \int_1^2 \frac{e^{x \ln x} - 1}{x(x^x - 1)} dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.
 \end{aligned}$$



117 【答案】 $\frac{1}{2}(1 - e^{-4})$

【分析】 交换积分次序得

$$\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy = \int_0^2 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^2 ye^{-y^2} dy = -\frac{1}{2}e^{-y^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1 - e^{-4}).$$

118 【答案】 a^2

【分析】 在由 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y - x \leq 1$ 所确定的区域 D_1 内 $f(x)g(y-x) = a^2$, 其余区域为零. 设 D_1 的面积为 S , 易知 $S = 1$, 则 $\iint_D f(x)g(y-x) dx dy = \iint_{D_1} a^2 dx dy = a^2 S = a^2$.



扫描二维码, 获取更多免费资料



选 择 题

函数、极限、连续

A 组

119 【答案】 D

【分析】 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$;
 当 $x \geq 0$ 时, $-x \leq 0$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2$.

$$\text{所以 } f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

(D) 选项正确.

120 【答案】 A

【分析】 由“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$ ”可得“如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$ ”. 因此, $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 连续, 但 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续, $f(x)$ 在 x_0 处不一定连续.

如 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 不连续, 但 $|f(x)| = 1$ 在 $x = 0$ 处连续.

于是应选(A).

121 【答案】 B

【分析】 $\left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)}$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \arctan x = 1$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left[1 + \left(\frac{2}{\pi} \arctan x - 1\right)\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2}{\pi} \arctan x - 1\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\pi} \arctan x - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}$.

122 【答案】 C

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$.

由三角函数公式可知, $\cos(\sin x) - \cos x = 2 \sin \frac{x + \sin x}{2} \sin \frac{x - \sin x}{2}$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\cos(\sin x) - \cos x \sim \frac{1}{2}(x + \sin x)(x - \sin x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin x)(x - \sin x)}{x^4} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$



$$= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

123 【答案】 B

【分析】 方法1 用洛必达法则.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{2x} = -\frac{1}{2\pi}.$$

方法2 作变量变换, 令 $u = x - \pi$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + u)}{(u + \pi)^2 - \pi^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\sin u}{u^2 + 2\pi u} = -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{u^2 + 2\pi u} \\ &= -\frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

124 【答案】 B

【分析】 由等价无穷小替换, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x) \sim x$, $\tan x \sim x$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\tan x \cdot \ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x \cdot x^2} = \frac{1}{2}.$$

【评注】 熟记如下几个常用的等价无穷小(非常有用):

$x \rightarrow 0$ 时 $\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$,
 $(1+x)^a - 1 \sim ax$ (a 为常数), $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$.

125 【答案】 B

【分析】 此为“ 1^∞ ”型.

方法1
$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^x - 1 - x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln(1 + e^x - 1 - x)}$$

而
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^x - 1 - x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\text{原式} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

方法2
$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^x - 1 - x)^{\frac{1}{e^x - 1 - x} \cdot \frac{e^x - 1 - x}{x^2}}$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^x - 1 - x)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}} = e,$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ (参见方法 1),}$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + e^x - 1 - x)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}} \right] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \\ &= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \end{aligned}$$

【评注】 本题为求“ 1^∞ ”型极限的典型方法. 式子简单一点的可以用方法 2, 复杂一点的可以用方法 1.

126 【答案】 C

【分析】 此为“ 1^∞ ”型. 命 $y = \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^{\frac{1}{x^2}}$, $\ln y = \frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right) \stackrel{\text{等}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \stackrel{\text{等}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

所以原式 $= e^{-\frac{1}{6}}$.

【评注】 求 $\lim u^v$ 形的极限, 常化成先求 $\lim v \ln u$. 若 $\lim v \ln u = a$, 则 $\lim u^v = e^a$; 若 $\lim v \ln u = -\infty$, 则 $\lim u^v = 0$; 若 $\lim v \ln u = +\infty$, 则 $\lim u^v = +\infty$.

127 【答案】 A

【分析】 此为“ $\infty - \infty$ ”型. 一般先通分:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} \stackrel{\text{等}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \\ &\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{2x} = 0. \end{aligned}$$

128 【答案】 A

【分析】 命 $y = (2 - \cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$, $\ln y = -\frac{\ln(2 - \cos x)}{x^2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos x)}{x^2} \stackrel{\text{等}}{=} -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} y = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

129 【答案】 C

【分析】 方法 1

$$\text{原式} \stackrel{\text{①}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{\sin^3 x}$$



$$\stackrel{\textcircled{2}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u - \sin u}{u^3} \stackrel{\textcircled{3}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{3u^2} \stackrel{\textcircled{4}}{=} \frac{1}{6}.$$

其中①用等价无穷小替换,当 $x \rightarrow 0$ 时用 $\sin^4 x$ 替换 x^4 .一般只想到用 x^4 去替换 $\sin^4 x$,也可以用 $\sin^4 x$ 去替换 x^4 .②作变量变换,命 $u = \sin x$.③用洛必达法则.④等价无穷小替换.

方法2 将 $\sin x$ 看成 u ,将 $\sin(\sin x)$ 按佩亚诺余项的泰勒公式展开至 $o(\sin^3 x)$,有

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \left[\sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + o(\sin^3 x) \right]}{\sin^3 x} = \frac{1}{6}.$$

方法3

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cdot \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2} \stackrel{\textcircled{2}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\sin x)^2}{3x^2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

其中①用洛必达法则,②用等价无穷小替换.

【评注】 (1) 读者用洛必达法则从头做到尾试试看,其简繁程度就一目了然.

(2) 以下做法是错误的.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \dots = \frac{1}{6}.$$

① 这一步,认为 $x \rightarrow 0$ 时 $\sin x \sim x$,从而 $\sin(\sin x) \sim \sin x$,于是推知 $x \rightarrow 0$ 时 $\sin x - \sin(\sin x) \sim x - \sin x$,从而知①成立,虽然结果是对的,但①是错误的.

130 【答案】 C

【分析】 由洛必达法则,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctan x) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctan x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \ln^2 x}{1 + x^2} = 0,$$

所以(C)为正确选项.

131 【答案】 A

【分析】 将已知条件改写成

$$I = a + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + 1 - e^{x^2 - 2x}}{x^2} = 2$$

即

$$I_1 = 2 - a$$

其中 $I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + 1 - e^{x^2 - 2x}}{x^2}$ 存在,由此定出参数 a 与 b .

方法1 用洛必达法则.

$$I_1 \stackrel{\frac{0}{0}}{\stackrel{\text{洛必达法则}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b - (2x - 2)e^{x^2 - 2x}}{2x}$$

分母极限为0,分子极限为 $b+2$,若 $b+2 \neq 0$,则极限 I_1 为 ∞ ,但极限 I_1 存在,故必有 $b+2=0$,

即 $b=-2$,于是代入 $b=-2$ 后该极限为 $\frac{0}{0}$ 型,可用洛必达法则得



$$I_1 \stackrel{b=-2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(2x-2)^2 e^{x^2-2x} - 2e^{x^2-2x}}{2} \stackrel{\text{代入 } x=0}{=} \frac{-6}{2} = -3$$

因此 $2-a=-3, b=-2$. 即 $a=5, b=-2$. 选(A).

方法2 用泰勒公式.

由极限与无穷小的关系

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx+1-e^{x^2-2x}}{x^2} = 2-a$$

可写成

$$bx+1-e^{x^2-2x} = (2-a)x^2 + o(x^2)$$

由泰勒公式

$$e^t = 1+t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2) (t \rightarrow 0)$$

令 $t = x^2 - 2x$, 则

$$t^2 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 4x^2 + o(x^2) (x \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} e^{x^2-2x} &= 1 + (-2x + x^2) + \frac{1}{2}(4x^2) + o(x^2) \\ &= 1 - 2x + 3x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

于是 $bx+1-e^{x^2-2x} = (b+2)x - 3x^2 + o(x^2) = (2-a)x^2 + o(x^2)$

由此得 $b+2=0, -3=2-a$, 即 $a=5, b=-2$. 选(A).

132 【答案】 D

【分析】

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2+n+n} + \frac{2}{n^2+n+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} &\leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \\ &\leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} \leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}.$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以由夹逼定理, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \frac{1}{2}.$$

133 【答案】 D

【分析】 由于(D)的等式⑦右边两个极限分别存在,并且之后的运算都正确,所以(D)正确.

【评注】 (A)的①加、减项用等价无穷小替换,是错误的.(B)的③,将一个极限中的某个部分先求极限,这是错误的,如果可以的话,那么

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 1^{\frac{1}{x^2}} = 1 \quad (1 \text{ 的任意次方都是 } 1).$$



而实际上,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)}{x^2} \xrightarrow{\text{洛}} \frac{1}{6},$$

$$\text{原式} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

(C) 的 ④ 根据极限的四则运算法则, 是不对的. ⑤ 也是不对的.

B 组

134

【答案】 C

【分析】 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则 $\{x_n\}$ 有界. 这是我们应熟悉的基本定理, 即 ① 正确. 关于 ②, ③ 的正确性, 从直观上理解即可.

$x_n: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

$x_{n+l}: x_{1+l}, x_{2+l}, x_{3+l}, \dots, x_{n+l}, \dots$

$\{x_n\}$ 中去掉前 l 项即 $\{x_{n+l}\}$.

$x_{2n-1}: x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}, \dots$

$x_{2n}: x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2n}, \dots$

它们一起涵盖了 $\{x_n\}$ 的所有项.

难吗? 不会做? 可以看
《考研数学复习全书·基础篇·
高等数学基础》第一章

命题 ④ 是错的. 例如 $x_n = n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (不存在极限).

因此选 (C).

【评注】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 若 $a \neq 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{a} = 1$$

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在, 也可能不存在.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \stackrel{\text{记}}{=} C$ 存在, 则必有 $C \in [-1, 1]$ (因为若 $|C| > 1$, 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$).

例如 $x_n = \frac{1}{l^n} (|l| > 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{l}$.

135

【答案】 B

【分析】 举反例说明 ①, ②, ③ 均错, 例如

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, h(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x), \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ 均不存在, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g(x) + h(x)) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot h(x)) = -1$$

故 ②, ③ 不正确.



若取 $f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$, 故 ① 也不正确.

按题设, 易知 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ 不存在 (否则, 若 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} [(f(x) + g(x)) - f(x)]$ 存在, 矛盾). 故 ④ 正确. 选(B).

【评注】 (1) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ 不存在, 当 $A \neq 0$ 时, 又有 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 不存在; 当 $A = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 可能存在, 也可能不存在.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 均不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 可能存在, 也可能不存在.

136 【答案】 C

【分析】 用反证法, 设 $\{x_n + z_n\}$ 有界, 则存在 $M > 0$ 与 $M_1 > 0$, 对一切 n , $|x_n + z_n| \leq M$, 且 $|z_n| \leq M_1$. 由不等式

$$|x_n| = |x_n + z_n - z_n| \leq |x_n + z_n| + |z_n| \leq M + M_1,$$

从而 $\{x_n\}$ 有界, 与题设矛盾.

其他(A)(B)(D) 均可举出反例.

【评注】 有界数列与有界数列之和、差、积, 均为有界, 但其商未必有界; 有界数列与无界数列之和或差必无界; 有界数列与无界数列之积或商未必有界, 也未必无界; 无界数列与无界数列之和、差、积或商均未必无界也未必有界, 应具体分析.

137 【答案】 A

【分析】
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x}.$$

若 n 为某正整数, 则连续使用 n 次洛必达法则后, 分子成为常数, 分母仍为 e^x , 从而极限为 0. 若 n 为某正数但非整数, 则使用了 $[n]$ 次洛必达法则后, 分子含 x^k , $k = n - [n]$, $0 < k < 1$. 再使用一次洛必达法则, 可见极限为 0. 总之 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

$$\text{对于 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-m} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^m} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{mx^m} = 0.$$

再由和的极限等于极限的和, 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n e^{-x} + x^{-m} \ln x) = 0.$$

【评注】 有时应将一个极限拆成若干有限个极限的和分别用洛必达法则计算, 当然这里要求拆开之后的各个极限应分别存在才行.

138 【答案】 A

【分析】 为书写简单起见, 记 $f(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$, 于是

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{f(x)} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{[f(x)]^{\frac{1}{3}} - x\} \{[f(x)]^{\frac{2}{3}} + x[f(x)]^{\frac{1}{3}} + x^2\}}{[f(x)]^{\frac{2}{3}} + x[f(x)]^{\frac{1}{3}} + x^2}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{[f(x)]^{\frac{2}{3}} + x[f(x)]^{\frac{1}{3}} + x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc}{[(x+a)(x+b)(x+c)]^{\frac{2}{3}} + x[(x+a)(x+b)(x+c)]^{\frac{1}{3}} + x^2}.
 \end{aligned}$$

分子最高次幂为2,系数为 $(a+b+c)$;分母最高次幂为2,系数之和为 $1+1+1=3$.从而知原式 $=\frac{1}{3}(a+b+c)$.

【评注】 求“ $\infty - \infty$ ”型极限一般有两个办法.一是通分;二是如本例,分子分母同乘某式以消去分子中的根号,从而化为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型.然后再提出成为“ ∞ ”的因子,约分后再处理.也有十分特殊的题,提出“ ∞ ”的因式,化为“ $\infty \cdot 0$ ”型处理.

139 【答案】 C

【分析】 由洛必达法则,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x \cos 2x \cos 3x)'}{(x^2)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos 2x \cos 3x + \cos x \cdot 2 \sin 2x \cos 3x + \cos x \cos 2x \cdot 3 \sin 3x}{2x} \\
 &= \frac{1}{2}(1+4+9) = 7.
 \end{aligned}$$

【评注】 这里用到 $(uvw)'$ 的公式,自己可以推导一下,当 u', v', w' 均存在时,
 $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$

140 【答案】 C

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\sqrt[3]{1-x^2} - 1} &\stackrel{\text{等}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{-\frac{1}{3}x^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{-\frac{2}{3}x} \\
 &\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + \sin x}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

141 【答案】 C

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x| \sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}} = 1.
 \end{aligned}$$



142 【答案】 D

【分析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x = 1$, 所以所求极限为“ $\infty \cdot 0$ ”型, 也可看成是“ $\frac{0}{0}$ ”型.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)} - 1}{x^3} \\ &\stackrel{\text{等}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)}{x^3} \\ &\stackrel{\text{等}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{\cos x - 1}{3}}{x^3} \\ &\stackrel{\text{等}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(-\frac{1}{2} x^2 \right)}{3x^3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

143 【答案】 B

【分析】 此为“ $\frac{0}{0}$ ”型. 先作变形,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e[e^{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1} - 1]}{x}.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1} - 1}{x} &\stackrel{\text{等}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以原式 $= -\frac{e}{2}$.

【评注】 本题若一开始就用洛必达法则, 会带来复杂的运算. 变形、化简与等价无穷小替换是首选的方法.

144 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\tan^2 \frac{x}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\tan^2 \frac{x}{2} \cdot (\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos 2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + 2 \sin^2 x}{2 \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2 \sin x}{\frac{x}{2}} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos x}{1} = 6. \end{aligned}$$



145 【答案】 B

【分析】 先求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \right]^n$. 当 $n > 4$ 时, $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} < \frac{\pi}{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \right]^n = 0$.

再求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) \right]^n$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) \right]^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\cos \frac{1}{n} - 1} \cdot n \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}} = 0, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) \right]^n = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \right]^n + \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) \right]^n \right\} = 1.$$

146 【答案】 D

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \sqrt{\cos 2x}}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 2x)^2 - \cos 2x}{x^k (\cos 2x + \sqrt{\cos 2x})} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^k} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{x^k} = a \neq 0 \end{aligned}$$

所以 $k = 2, a = -1$.

147 【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } \frac{\sin 6x - (\sin x)f(x)}{x^3} &= \frac{\sin 6x - 6\sin x + (\sin x)(6 - f(x))}{x^3} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - (\sin x)f(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - 6\sin x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{6 - f(x)}{x^2} \right] = 0, \end{aligned}$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$

$$I \stackrel{\text{记}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin x - \sin 6x}{x^3} \stackrel{\text{记}}{=} I_1.$$

方法 1 用洛必达法则求 I_1

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\cos x - 6\cos 6x}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 6\sin 6x}{2x} = -1 + 36 = 35$$

因此 $I = 35$. 选(B).

方法 2 用泰勒公式

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), 6\sin x = 6x - x^3 + o(x^3)$$



$$\sin 6x = 6x - \frac{1}{6}(6x)^3 + o(x^3), -\sin 6x = -6x + 36x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin x - \sin 6x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{35x^3 + o(x^3)}{x^3} = 35.$$

因此 $I = 35$. 选(B).

148

【答案】D

【分析】(A) 若用洛必达法则计算, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$ 不存在, 而显然,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

故(A) 不能用洛必达法则计算.

(B) 由洛必达法则, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, 而等号右侧的极限计算与等号左侧的极限计算难度一样. 故(B) 不能用洛必达法则计算.

(C) 由洛必达法则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在. 而显然

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

故(C) 不能用洛必达法则计算.

(D) 由洛必达法则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x e^{\sin x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos^2 x e^{\sin x} + \sin x e^{\sin x}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - \cos^2 x e^{\sin x}}{\sin x} + e^{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos^2 x e^{\sin x}}{\sin x} + 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos^3 x e^{\sin x} + \sin 2x e^{\sin x}}{\cos x} + 1 = 1. \end{aligned}$$

故(D) 能用洛必达法则计算.

一元函数微分学

A 组

149

【答案】B

【分析】当 $f(0) = 0$ 时,

$$f'(0) \text{ 存在} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ 存在}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \text{ 存在} \Leftrightarrow \lim_{t=x^2, t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} \text{ 存在} \Leftrightarrow f'_+(0) \text{ 存在}$$

若 $f'(0)$ 存在 $\Rightarrow f'_+(0)$ 存在 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2}$ 存在. 反之, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2}$ 存在 $\Rightarrow f'_+(0)$ 存在 $\nRightarrow f'(0)$ 存在.

因此选(B).



【评注】 例 $f(x) = |x|$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = 1$, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 不可导.

150 【答案】 C

【分析】 由条件出发,按导数定义

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

及极限的不等式性质可知, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ 时,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

$\Rightarrow$ 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f(x) - f(x_0) > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f(x) - f(x_0) < 0$.

因此,选(C).

【评注】 (1) 前面的分析方法,给出了如下结论的证明:

设 $f'(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f(x) > f(x_0)$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f(x) < f(x_0)$.

作为选择题,有时我们可选用特殊选取法.即特殊选取某具体的 $f(x)$ 满足题中的条件,若四个选项中,有三个选项不正确,一个选项正确,就选该项即可.

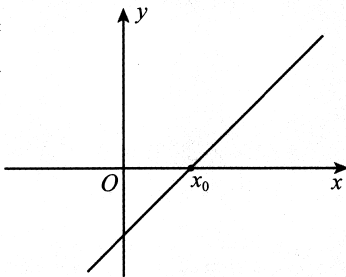
如取 $f(x) = x - x_0$, 如右图,则 $f'(x) = 1 > 0$, 满足条件. 对此 $f(x)$, 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上单调递增,且

$$f(x) > f(x_0) = 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + \delta)),$$

$$f(x) < f(x_0) = 0 \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0)).$$

于是选项(B)(D)不正确,对此 $f(x)$, (A)(C) 均正确. 但若(A)正确,则(C)一定正确,由“四选一”原则, (A)一定不正确,故选(C).

(2) 若 $f'(x_0) > 0$ 且 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 连续 $\Rightarrow$ 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 单调递增.



151 【答案】 C

【分析】

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = 0,$$

而 $f(0) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

下面讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的可导性.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/\Delta x}} = 0,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/\Delta x}} = 1,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点不可导. (C) 为正确选项.



152 【答案】 B

【分析】 将方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 中的 y 看成 x 的函数, 两边对 x 求导数, 有

$$\frac{2x + y'}{x^2 + y} = 3x^2 y + x^3 y' + \cos x.$$

解出 y' ,

$$y' = \frac{(3x^2 y + \cos x)(x^2 + y) - 2x}{1 - x^3(x^2 + y)}. \quad (*)$$

当 $x = 0$ 时由原方程可得 $y = 1$. 以此代入 y' 中, 得 $y'(0) = 1$.

【评注】 (1) 对于在一定条件下由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 求导数, 与多元函数微分学中方法类似, 有公式

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (**)$$

其中求 $F'_x(x, y)$ 时 y 视作与 x 无关, 求 $F'_y(x, y)$ 时 x 视作与 y 无关.

(2) 求 y'' 时, 应由 $(*)$ 得出的 y' 或由公式 $(**)$ 得到的 y' 再对 x 求导. 此时右边的 y 均应视为 x 的函数处理.

(3) 为求导数在某 $x = x_0$ 处的值, 题中一般只给出 $x = x_0$ 而未给出相应的 y 的值. 此时应从所给方程中计算出相应的 y 的值 (如本例 $x = 0$ 时 $y = 1$), 而不能将 y 留在式子中未用它对应的值代入.

153 【答案】 B

【分析】 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - \cos x + \sin x}{x} = 0$, 所以存在 $\dot{U}_\delta(0)$, 当 $x \in \dot{U}_\delta(0)$ 时,

$$\frac{e^{f(x)} - \cos x + \sin x}{x} = 0 + \alpha, \lim_{x \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

所以

$$f(x) = \ln(\alpha x + \cos x - \sin x).$$

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\alpha x + \cos x - \sin x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\alpha x + \cos x - \sin x) \quad (*)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + \alpha x + \cos x - 1 - \sin x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\alpha x + \cos x - 1 - \sin x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \alpha + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -1.$$

所以 $f'(0) = -1$.

【评注】 求极限 $(*)$ 时, 不能直接用洛必达法则, 因为不知道这里的 α 是否可求导数.



154 【答案】 D

【分析】 方法1 将 $f(x)$ 按佩亚诺余项的泰勒公式展开至 $o(x^3)$, 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + o(x^3),$$

代入极限式的分子, 其分母用等价无穷小替换:

$$\tan x - \sin x = \frac{(1 - \cos x)\sin x}{\cos x} \sim \frac{1}{2}x^3 \quad (\text{当 } x \rightarrow 0),$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\tan x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3} = 1$$

所以 $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = 0, f'''(0) = 3$. 选(D).

方法2 用洛必达法则. 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处存在3阶导数, 所以存在 $\dot{U}_\delta(0)$, 当 $x \in \dot{U}_\delta(0)$ 时, $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 都存在, 且连续.

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\tan x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{x^3}.$$

因上述极限存在, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. 由洛必达法则

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x)}{3x^2}.$$

若 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \neq 0$, 则上述右边为 ∞ , 矛盾, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$. 再用洛必达法则,

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f''(x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{3x}.$$

若 $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) \neq 0$, 则上述右边为 ∞ , 矛盾, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = f''(0) = 0$. 于是

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{3(x - 0)} = \frac{1}{3}f'''(0).$$

由题设 $I = 1$, 所以 $f'''(0) = 3$. 选(D).

【评注】 上面最后计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x}$ 时, 不能再使用洛必达法则, 其理由是, 仅设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处存在3阶导数, 而未设存在 $\dot{U}_\delta(0)$, 当 $x \in \dot{U}_\delta(0)$ 时 $f(x)$ 存在3阶导数. 对比方法1与方法2可见, 方法1比方法2方便不少.

155 【答案】 C

【分析】 $f(x) = x^2 e^{3x} = x^2 \left(1 + \frac{3}{1!}x + \frac{3^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{3^{n-2}}{(n-2)!}x^{n-2} + o(x^{n-2}) \right)$

$$= x^2 + \frac{3}{1!}x^3 + \frac{3^2}{2!}x^4 + \cdots + \frac{3^{n-2}}{(n-2)!}x^n + o(x^n), \quad n \rightarrow \infty$$

$$\text{所以 } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{3^{n-2}}{(n-2)!}, f^{(n)}(0) = \frac{3^{n-2}n!}{(n-2)!} = 3^{n-2}n(n-1).$$

156 【答案】 B

【分析】 设切点为 (x_0, y_0) , 则因为 $y = x$ 为曲线 $y = a^x$ 的切线,



$$\begin{cases} a^{x_0} = x_0 \\ a^{x_0} \ln a = 1 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} a^{x_0} \ln a - 1 = 0 \\ x_0 \ln a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{1}{\ln a} = \frac{\ln \frac{1}{\ln a}}{\ln a}$$

$$a = e^{\frac{1}{e}}, x_0 = y_0 = e.$$

157 【答案】 B

【分析】 设 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x \geq 1$, 考察 $f(x)$ 的单调性并求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 的最大值.

$$f'(x) = (e^{\frac{1}{x} \ln x})' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} \begin{cases} > 0, 1 \leq x < e \\ = 0, x = e \\ < 0, x > e \end{cases}$$

于是 $1 \leq x \leq e$ 时 $f(x) \nearrow$, 当 $x \geq e$ 时 $f(x) \searrow$. 因此在 $x = e$ 两侧的数列项是 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$, $x = e$ 是 $f(x)$ 的最大值点.

比较 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$ 的值 $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$.

所以数列的最大项为 $\sqrt[3]{3}$. 选(B).

【评注】 不能对 $f(n) = n^{\frac{1}{n}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 求导, 因为数列没有导数概念.

158 【答案】 C

【分析】 令 $f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x - 4) = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = 4$ (不合题意舍去).

$f(0) = b, f(-1) = -7a + b, f(2) = -16a + b$, 由于 $a > 0$, 所以, $f(0)$ 是最大值, $f(2)$ 是最小值.

$$\begin{cases} f(0) = b = 3 \\ f(2) = -16a + b = -29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

所以选(C).

159 【答案】 C

【分析】 只须考察 $f''(x) = 0$ 的点与 $f''(x)$ 不存在的点.

$f''(x_1) = f''(x_4) = 0$, 在 $x = x_1, x_4$ 两侧 $f''(x)$ 变号, 故凹凸性相反 $\Rightarrow (x_1, f(x_1)), (x_4, f(x_4))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点.

$x = 0$ 处 $f''(0)$ 不存在, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 在 $x = 0$ 两侧 $f''(x)$ 变号, 因此 $(0, f(0))$ 也是 $y = f(x)$ 的拐点.

虽然 $f''(x_3) = 0$, 但在 $x = x_3$ 两侧 $f''(x) > 0, y = f(x)$ 是凹的. $(x_3, f(x_3))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点. 因此总共有三个拐点. 选(C).

160 【答案】 B

【分析】 $y' = \frac{1}{3} (x-4)^{-\frac{2}{3}}, y'' = -\frac{2}{9} (x-4)^{-\frac{5}{3}}$.



所以当 $y \in (-\infty, 4)$ 时, $y'' > 0$, 曲线凹; 当 $y \in (4, +\infty)$ 时, $y'' < 0$, 曲线凸.
(4, 0) 为拐点.

161 【答案】 C

【分析】 令 $f'(x) = \frac{3}{x} - 1 = 0$, 解得函数 $f(x)$ 的驻点为 $x = 3$.

函数 $f(x) = 3\ln x - x$ 在 $(0, 3)$ 单调增, 在 $(3, +\infty)$ 单调减.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, f(3) = 3\ln 3 - 3 > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

所以函数 $f(x) = 3\ln x - x$ 在 $(0, 3)$ 和 $(3, +\infty)$ 各有 1 个零点.

B 组

162 【答案】 C

【分析】 因为 $f(x) = |x - a| g(x)$ 在 $x = a$ 点处可导, 所以

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} g(a+h)$$

存在. 而函数 $g(x)$ 在 $x = a$ 点处连续, $\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a)$, $\lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{|h|}{h} = \pm 1$, 所以 $g(a) = 0$.

163 【答案】 C

【分析】 先分别考察左、右可导性.

显然, $f(0) = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4} = \frac{1}{2} (\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 右连续})$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \frac{\arcsin^2 x}{x} \xrightarrow{\text{有界变量与无穷小之积}} 0 (\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 左连续})$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$. 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 但不可导. 选(C).

【评注】 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 左可导且右可导, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 从而它在 x_0 处的极限存在.

164 【答案】 A

【分析】 本题是(A)(B)(C)(D)4个极限式中, 哪个存在能保证 $f'(0)$ 存在. 因此应将 $f'(0)$ 的定义式用所给的极限式表示. 例如对于(A), 将(A)的那个极限值记为A, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{\text{令 } x = \ln(1-h)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[\ln(1-h)]}{\ln(1-h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(\ln(1-h))}{h} \cdot \frac{h}{\ln(1-h)} \right] = A \cdot (-1) = -A, \end{aligned}$$

所以 $f'(0)$ 存在且等于 $-A$. (A) 的存在保证了 $f'(0)$ 存在, 选(A).



【评注】 下面说明(B)(C)(D)的存在,不能保证 $f'(0)$ 存在.讨论如下:设(B)存在,其极限值记为 B ,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{令 } x = \sqrt{1+h^2}-1}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt{1+h^2}-1)}{\sqrt{1+h^2}-1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(\sqrt{1+h^2}-1)}{h^2} \cdot \frac{h^2}{\sqrt{1+h^2}-1} \right] = B \cdot 2 = 2B.\end{aligned}$$

看起来,好像(B)的存在也保证了 $f'(0)$ 存在.其实不然,由于 $x = \sqrt{1+h^2}-1 > 0$,所以从上述讨论看出,只保证 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ 存在即 $f'_+(0)$ 存在,并不能保证 $f'(0)$ 存在.(B)不充分.

设(C)存在,其极限值记为 C ,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{令 } x = \tan h - \sin h}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\tan h - \sin h)}{\tan h - \sin h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(\tan h - \sin h)}{h^2} \cdot \frac{h^2}{\tan h - \sin h} \right],\end{aligned}$$

而

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{\tan h - \sin h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos h}{\sin h \cdot (1 - \cos h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos h}{h \cdot \frac{1}{2}h^2} = \infty,$$

不能保证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ 存在.

对于(D)留给读者去讨论或举例说明(D)的存在不能保证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ 存在.

165 【答案】 D

【分析】 因为曲线 $y = f(x)$ 在原点与 $y = \sin x$ 相切,所以 $f(0) = 0, f'(0) = (\sin x)'|_{x=0} = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \sqrt{\frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{f'(0)} = \sqrt{2}.$$

166 【答案】 D

【分析】 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x) + f(x)] = 1$,所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^x f(x)]'}{e^x} = 1$,由洛必达法则,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[e^x f(x)]'}{e^x} = 1,$$

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \{[f'(x) + f(x)] - f(x)\} = 0$.(D)为正确选项.

167 【答案】 A

【分析】 方法1 由

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + f(x) \sin x}{e^{x^2} - 1}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + \sin x + [f(x) - 1]\sin x}{x^2}$$

而
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{1-x} + \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1-x)^2} - \sin x}{2} = -\frac{1}{2}$$

则
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x) - 1]\sin x}{x^2} = \frac{1}{2}, \text{ 即}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = \frac{1}{2}$.

方法2 由泰勒公式知

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \sin x = x + o(x^2).$$

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + f(x)\sin x}{e^{x^2} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] + f(x)[x + o(x^2)]}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + f(x) \cdot o(x^2)}{x^2} + \frac{xf(x) - x}{x^2} \right]$$

而
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) + f(x) \cdot o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}, \text{ 则}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

即
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{2}$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = \frac{1}{2}$.

168 【答案】 C

【分析】 $\arcsin b - \arcsin 0 = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}(b-0), 0 < \xi < b$, 解出 ξ ,

$$\xi = \sqrt{\frac{(\arcsin b)^2 - b^2}{(\arcsin b)^2}},$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{b^2} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{(\arcsin b)^2 - b^2}{b^2 (\arcsin b)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - (\sin t)^2}{(\sin t)^2 t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - \sin^2 t}{t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - 2\sin t \cos t}{4t^3}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - \sin 2t}{4t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2t}{12t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2t)^2}{12t^2} = \frac{1}{3}.$$



所以 $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\xi}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 选(C).

【评注】 即使“中值”的极限,并非一定在“ $\frac{1}{2}$ ”处.

169 【答案】 C

【分析】

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

$$\theta(x) = \frac{1}{4} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2 - x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} (\sqrt{x^2+x} - x).$$

$$\theta'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 \right) > 0,$$

所以 $\theta(x)$ 单调增.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{1}{2}.$$

所以(C)为正确选项.

170 【答案】 C

【分析】 因为 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内二阶可导, 所以由拉格朗日中值定理知, $\forall x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \exists \theta(x)$ 介于 $0, x$ 之间, 且满足 $f(x) - f(0) = xf'(\theta(x))x$.

由泰勒公式, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2),$$

$$xf'(\theta(x))x = x[f'(0) + f''(0)\theta(x)x + o(x)],$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$x[f'(0) + f''(0)\theta(x)x + o(x)] = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2),$$

$$f''(0)\theta(x) + o(1) = \frac{1}{2}f''(0) + o(1),$$

而由条件, $f''(0) \neq 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$, (C) 为正确选项.

171 【答案】 D

【分析】 只有间断点 $x = \pm 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

$\Rightarrow x = 1$ 与 $x = -1$ 为铅直渐近线.



因为

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \pm 1$$

又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} - x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] + 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同理 } \lim_{x \rightarrow -\infty} (y + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} + x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x \rightarrow +\infty$ 时有斜渐近线 $y = x$, $x \rightarrow -\infty$ 时有斜渐近线 $y = -x$.

因此选(D).

【评注】 同是 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$), 如果曲线有斜渐近线就不可能有水平渐近线, 如果曲线有水平渐近线, 就不可能有斜渐近线.

172

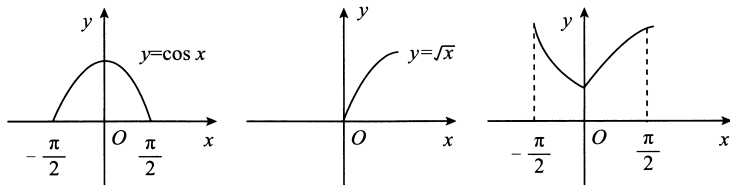
【答案】 C

【分析】 方法1 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续. 只须考察 $f(x)$ 在 $x = 0$ 某空心邻域如 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$ 时 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 的变化.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} \sin x < 0, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} > 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ f''(x) &= \begin{cases} \cos x > 0, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

由此可得 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点. 因此选(C).

方法2 由 $y = \cos x$, $y = \sqrt{x}$ 的图形可得 $y = f(x)$ 的图形.



因此选(C).



【评注】 (1) 只须考察 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的连续性及 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 两侧 $f'(x), f''(x)$ 是否变号, 而不须考虑 $f'(x_0), f''(x_0)$ 是否存在就可判定 $x = x_0$ 是否是 $f(x)$ 的极值点与拐点. 本题中 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 $f'(0), f''(0)$ 不存在, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不可导, $x = x_0$ 与 $(x_0, f(x_0))$ 可以同时是 $y = f(x)$ 的极值点与拐点. 本题就是如此. 但对于可导函数, 可以证明: 若 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 则 $x = x_0$ 不可能是 $f(x)$ 的极值点.

173 【答案】 B

【分析】 记 $f(x) = \tan x - 1 + x$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 区间内连续.

$f(0) = -1 < 0, f(1) = \tan 1 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 区间内至少有 1 个零点.

又 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) = \sec^2 x + 1 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 区间内有唯一的零点. (B) 选项正确.

174 【答案】 C

【分析】 因 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$,

$$f''(x) = 6(2x-3), f''(1) = -6 < 0, f''(2) = 6 > 0,$$

故 $f(1) = 5 - a$ 为极大值, $f(2) = 4 - a$ 为极小值.

当 $a = 4$ 时, $f(1) = 5 - 4 > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 且在区间 $(-\infty, 1)$ 内 $f'(x) > 0, f(x)$ 单调增加, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 内有唯一零点. 同时, $f(2) = 4 - a = 0$, 即 $x = 2$ 为 $f(x)$ 的另一零点, 而在区间 $(1, 2)$ 内, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调减少. 在区间 $(2, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0, f(x)$ 单调增加, 所以 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 内均大于零. 由此可知当 $a = 4$ 时, $f(x)$ 恰有两个零点.

另外, 当 $a = 2$ 时, $f(1) = 3 > 0, f(2) = 2 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内均为正, 没有零点, 此时 $f(x)$ 只有一个零点. 类似可以讨论当 $a = 6$ 或 8 时, $f(x)$ 只在 $(2, +\infty)$ 内有唯一零点, 所以应选 (C).

175 【答案】 C

【分析】 要讨论零点个数, 免不了要考虑单调性, 先求导数:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \stackrel{\text{令}}{=} 0, x = e (\text{唯一驻点}).$$

当 $0 < x < e$ 时 $f'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时 $f'(x) < 0$.

所以 $f(e) = 1 - 1 + 1 = 1 > 0$ 为唯一极大值, 即最大值. 将区间 $(0, +\infty)$ 划为两个区间 $(0, e]$ 与 $[e, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, f(e) = 1 > 0,$$

且当 $0 < x < e$ (或写成 $0 < x \leq e$ 亦可), $f(x)$ 严格单调增, 所以在区间 $(0, e)$ (或写成 $(0, e]$ 亦可) 上 $f(x)$ 有唯一零点. 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty^{(\text{注})}, f(e) = 1 > 0,$$

且当 $e < x < +\infty$ (或写成 $e \leq x < +\infty$ 亦可), $f(x)$ 严格单调减, 所以在区间 $(e, +\infty)$ (或写成 $[e, +\infty)$ 亦可) 上 $f(x)$ 亦有唯一零点. 所以在 $(0, +\infty)$ 上有且仅有 2 个零点. 选 (C).



【评注】(1) 讨论可导函数在区间上的零点个数一般就按本题解法, 第一步, 划分单调区间, 第二步, 在每一严格单调的区间上用连续函数零点定理, 分别考虑两端点处 $f(x)$ 的符号(同号无零点, 反号存在唯一零点), 考虑端点处符号时, 在无穷区间上, 用极限代替. 例如, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 就认为是负号.

(2) 前面(注)中,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{x}{e} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \ln e^{-\frac{x}{e}} + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x e^{-\frac{x}{e}} + 1),\end{aligned}$$

而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{x}{e}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{e}}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{e} e^{\frac{x}{e}}} = 0.$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. 下面几个常用的极限可以类似地处理, 其结果可以记住

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^k = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k e^{-x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^k}{x} = 0, \text{ 其中 } k \text{ 为正数.}$$

一元函数积分学

A 组

176 【答案】 C

【分析】 逐一分析它们的阶.

(A) (考察等价无穷小)

$(1+x)^x - 1 \sim \ln[(1+x)^x - 1 + 1] = x^2 \ln(1+x) \sim x^3 (x \rightarrow 0) \Rightarrow (1+x)^x - 1$ 是 x 的三阶无穷小.

(B) (考察等价无穷小)

$e^{x^4-2x} - 1 \sim x^4 - 2x \sim -2x (x \rightarrow 0) \Rightarrow e^{x^4-2x} - 1$ 是 x 的一阶无穷小.

(C) (待定阶数法)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^4}{kx^{k-1}} \stackrel{k=6}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x^4}{3x \cdot x^4} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \int_0^{x^2} \sin t^2 dt$ 是 x 的六阶无穷小.

(D) (待定阶数法或泰勒公式法)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \times 2 - \frac{1}{3}(1+3x)^{-\frac{2}{3}} \times 3}{kx^{k-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{3}{2}} \times 2 + \frac{2}{3}(1+3x)^{-\frac{5}{3}} \times 3}{k(k-1)x^{k-2}} \stackrel{k=2}{=} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ 是 x 的二阶无穷小.



或用泰勒公式. 已知

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)t^2 + o(t^2) (t \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow (1+2x)^{\frac{1}{2}} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \times 2x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (2x)^2 - \left[1 + \frac{1}{3} \times 3x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) (3x)^2 \right] + o(x^2)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$\Rightarrow \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ 是 x 的二阶无穷小. 因此选 (C).

177 【答案】 C

【分析】 在 $\int \frac{x}{f(x)} dx = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + C$ 两边求导可得

$$\frac{x}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

所以 $f(x) = -x\sqrt{1+x^2}$, $\int f(x) dx = \int (-x\sqrt{1+x^2}) dx = -\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$, 选择 (C).

178 【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } \int x f'(x) dx &= \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx \\ &= x(\sin x \ln |x|)' - \sin x \ln |x| + C \\ &= x(\cos x \ln |x| + \frac{\sin x}{x}) - \sin x \ln |x| + C \\ &= x \cos x \ln |x| + \sin x - \sin x \ln |x| + C. \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \ln |x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

因此选 (B).

【评注】 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$F'(x) = f(x), \int f(x) dx = F(x) + C, C \text{ 为任意常数.}$$

179 【答案】 A

【分析】 由 $f(\ln x) = x + \ln^2 x$, 命 $\ln x = u$, 得

$$f(u) = e^u + u^2,$$

从而 $f(x) = e^x + 2x$, 由分部积分

$$\begin{aligned} \int x f'(x) dx &= \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx \\ &= x(e^x + x^2) - \int (e^x + x^2) dx \\ &= x e^x + x^3 - e^x - \frac{1}{3} x^3 + C \\ &= (x-1)e^x + \frac{2}{3} x^3 + C. \end{aligned}$$



选(A).

180 【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } x_n &= \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] \end{aligned}$$

这是函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的一个积分和:

$$\frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{1}{n}$$

其中积分区间 $[0,1]$ 被 n 等分, n 等分后每个小区间是 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] (i=1,2,\cdots,n)$, ξ_i 是区间的右端点. 因此

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

选(B).

181 【答案】 C

【分析】 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} < 0$, 所以该积分为负, 不等于零.

【评注】 (A)(B)(D) 中的被积函数均是奇函数, 在对称区间上积分, 它们的结果均为零.

182 【答案】 B

【分析】 由于 $f(x)$ 为分段表达式, 所以按定积分的分段积分性质, 分段积分:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} x^2 \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{4} \right) = 1 + \frac{3}{8} \pi^2. \end{aligned}$$

183 【答案】 A

【分析】 记 $A = \int_0^2 f(x) dx$, 则

$$f(x) = \frac{1}{4+x^2} + \sqrt{4-x^2} \cdot A,$$

将此式两边在区间 $[0,2]$ 上积分, 得

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx + A \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_0^2 + A \cdot \frac{1}{4} \cdot 4\pi = \frac{\pi}{8} + \pi A, \end{aligned}$$



所以 $(1-\pi)A = \frac{\pi}{8}$, $A = \frac{\pi}{8(1-\pi)}$, $\int_0^2 f(x)dx = A = \frac{\pi}{8(1-\pi)}$.

【评注】 若题为求 $f(x)$, 则 $f(x) = \frac{1}{4+x^2} + \frac{\pi}{8(1-\pi)}\sqrt{4-x^2}$. 本题为未知函数含于确定限的积分之中, 要求此未知函数, 就采用本题的方法. 另一类题是未知函数含于变限积分之中, 应采用两边求导以清除变限积分, 将来在微分方程中还会见到.

184 【答案】 A

【分析】 作变量代换 $u = x+t$, 则

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-x}^0 t f(x+t) dt = \int_0^x (u-x) f(u) du = \int_0^x u f(u) du - x \int_0^x f(u) du \\ g'(x) &= x f(x) - \int_0^x f(u) du - x f(x) = - \int_0^x f(u) du. \end{aligned}$$

185 【答案】 C

【分析】
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\cos^2 x}^{2x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt &= \frac{1}{\sqrt{1+4x^6}} (2x^3)' - \frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}} (\cos^2 x)' \\ &= \frac{6x^2}{\sqrt{1+4x^6}} + \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}. \end{aligned}$$

选(C).

186 【答案】 C

【分析】 方法1 先求出 $F(x)$ 再讨论之.

由 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, 当 $x \in [-1, 0]$ 时

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x (1+t) dt \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

当 $x \in (0, 1]$ 时

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^x (-t) dt = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

即

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}, & x \in [-1, 0], \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

$$F(0) = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x),$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x} = 1,$$



$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x} = 0.$$

$F'_-(0) \neq F'_+(0)$, 所以选(C).

方法2 用现成定理, 定理如下: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除点 $x = x_0 \in (a, b)$ 外均连续, 而在 $x = x_0$ 处 $f(x)$ 有跳跃间断点:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-), \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+), f(x_0^-) \neq f(x_0^+),$$

则不论下式中 c 是否等于 x_0 , $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ 有下述结论:

- ① $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续;
- ② $F'(x) = f(x)$, 当 $x \in (a, b)$, 但 $x \neq x_0$;
- ③ $F'_-(x_0) = f(x_0^-)$, $F'_+(x_0) = f(x_0^+)$.

直接套用此定理知选(C).

187 【答案】 B

【分析】 方程 $F(x) = 0$ 的根, 也称为函数 $F(x)$ 的零点. 如果 $F(x)$ 没有导数, 一般(这里讲的是一般, 而不是一定)用连续函数零点定理. 如果有导数, 则要用到罗尔定理. 今 $F(x)$ 为两个变限函数的和:

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt - \int_e^x \frac{1}{t^4 + 1} dt, x \in (-\infty, +\infty)$$

以连续函数零点定理试之:

$$F(0) = 0 - \int_1^2 \frac{1}{t^4 + 1} dt < 0,$$

$$F(1) = \int_0^1 e^{-t^2} dt - \int_e^2 \frac{1}{t^4 + 1} dt = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_2^e \frac{1}{t^4 + 1} dt > 0,$$

由连续函数零点定理知, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使 $F(\xi) = 0$. 又

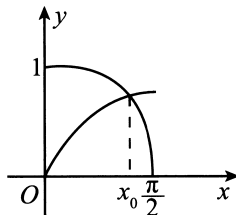
$$F'(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{e^{4x} + 1} e^x > 0, x \in (-\infty, +\infty),$$

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加, 于是推知 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有且仅有 1 个零点. 选(B).

188 【答案】 C

【分析】 作积分变量变换 $\sqrt{x} = t$, 有 $x = t^2, dx = 2t dt$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx &= - \int_0^{+\infty} t d e^{-t^2} = - \left(t e^{-t^2} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) \\ &= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$



189 【答案】 C

【分析】 先求 $y = \cos x$ 与 $y = a \sin x$ 的交点的横坐标 x_0 .

$$\text{由 } \cos x_0 = a \sin x_0 \Rightarrow \tan x_0 = \frac{1}{a}.$$



因 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, 故

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} (\cos x - a \sin x) dx &= (\sin x + a \cos x) \Big|_0^{x_0} = \sin x_0 + a \cos x_0 - a \\ &= (\tan x_0 + a) \cos x_0 - a = \left(\frac{1}{a} + a \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x_0}} - a \\ &= \frac{1 + a^2}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} - a = \sqrt{1 + a^2} - a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

由 $\sqrt{1 + a^2} - a = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1 + a^2} + a = 2$, 易得 $a = \frac{3}{4}$.

选(C).

知识点链接

《考研数学复习全书·基础篇·
高等数学基础》第三章

190 【答案】 C

【分析】 记 $\int_0^1 f(t) dt = a$, 则 $f(x) = x + 2a$, 两边在 $[0, 1]$ 上积分, 则有

$$a = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2a) dx = \frac{1}{2} + 2a,$$

所以 $a = -\frac{1}{2}, f(x) = x - 1$,

从而函数 $xf(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的平均值为

$$\frac{1}{2} \int_0^2 xf(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x(x-1) dx = \frac{1}{3}.$$

所以选择(C).

191 【答案】 C

【分析】 区域 D 的面积

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi} x \right) dx = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

区域 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \sin^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi \left(\frac{2x}{\pi} \right)^2 dx \\ &= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

因此选择(C).

192 【答案】 D

【分析】 把曲线表成 $x = x(y)$, 要分成两条:

$$x = 1 \pm \sqrt{1-y} \quad (0 \leq y \leq 1)$$

看成两个旋转体的体积之差:

$$V_1 = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{1-y})^2 dy, \quad V_2 = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1-y})^2 dy.$$



于是 $V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 [(1 + \sqrt{1-y})^2 - (1 - \sqrt{1-y})^2] dy$,

因此选(D).

【评注】 (1) 按公式计算得

$$V = \pi \int_0^1 4\sqrt{1-y} dy = 4\pi \left(-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3}\pi.$$

(2) 也可利用另一旋转体体积公式

设 $b > a \geq 0$, 曲线 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 与直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

我们也可求出

$$V = 2\pi \int_0^2 x[1 - (x-1)^2] dx = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = 2\pi \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}\pi.$$

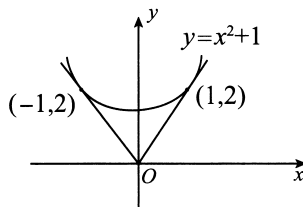
193

【答案】 C

【分析】 设切点坐标为 (x_0, y_0) , 于是切线斜率为 $2x_0$, 切线方程为

$$y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$$

以 $x = 0$ 时 $y = 0$ 代入, 得 $y_0 = 2x_0^2$. 又因点 (x_0, y_0) 在曲线 C 上, 有 $y_0 = x_0^2 + 1$. 解得切点坐标为 $(\pm 1, 2)$. 切线方程为 $y = \pm 2x$, 见右图. 求 V 有两个方法.



方法1 以 y 为自变量, 曲线表示为 $x = \sqrt{y-1}$, $x = \frac{1}{2}y$, V 是两旋转体体积相减:

$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{y}{2} \right)^2 dy - \pi \int_1^2 (y-1) dy = \frac{\pi}{6}.$$

方法2 以 x 为自变量, 曲线表示为 $y = x^2 + 1$, $y = 2x$. 任取 $[x, x+dx] \subset [0, 1]$ 对应的小竖窄条, 高 $x^2 + 1 - 2x$, 相应的体积微元 $dV = 2\pi x(x^2 + 1 - 2x)dx$, 于是

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x^2 + 1 - 2x) dx = \frac{1}{6}\pi.$$

B 组

194

【答案】 B

【分析】 当 $x \rightarrow 0$ 时, 设 $f(x)$ 为 x 的 p 阶无穷小, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t e^{\sin t} dt}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\sin x}}{p x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{p x^{p-2}}$$

当 $p = 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^p} = \frac{1}{2}$ 为非零常数, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 为 x 的二阶无穷小.

195

【答案】 A

【分析】 $\int_0^1 e^{x^2} dx$ 中的 x 含于被积函数之中, 应设法将它变换到积分的限中或(和)积分号外.



作积分变量变换, 命 $t\sqrt{x} = u$, 有 $dt = \frac{1}{\sqrt{x}}du$, 于是

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 e^{t^2x} dt &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{u^2} du, \\
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^1 e^{t^2x} dt - \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{10}\right)}{x^k} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{u^2} du - \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{10}x^{\frac{5}{2}}\right)}{x^{k+\frac{1}{2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(k + \frac{1}{2}\right)x^{k-\frac{1}{2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)}{(2k+1)x^k} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - (1+x)}{(2k+1)kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{(2k+1)k(k-1)x^{k-2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{(2k+1)k(k-1)(k-2)x^{k-3}}
 \end{aligned}$$

要使上式存在且不为零, 取 $k = 3$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^3} = \frac{1}{42}.$$

所以当 $x \rightarrow 0^+$ 时 $g(x) \sim \frac{1}{42}x^3$. $k = 3, A = \frac{1}{42}$.

196 【答案】 B

【分析】 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, 而题设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt + a \right)$ 存在, 故必有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt + a \right) = 0,$$

所以 $a = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = -\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 在概率论中非常重要, 要求读者记住这个结果). 由洛必达法则,

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{-e^{-x}} \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.
 \end{aligned}$$

选(B).



197 【答案】 D

【分析】 通过举反例可得不选(A)(B)(C).

例如 $f(x) = x$, $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$, 但 $\int_{-1}^1 f^2(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \neq 0$, 因此不选(A)(C).

例如 $f(x) = 0$ 时, $\int_a^b f(x) dx = 0$, 但 $\int_a^b f^2(x) dx = 0$, 因此不选(B).

由排除法, 应选(D).

198 【答案】 C

【分析】 我们要逐一分析.

结论① 正确. 由条件 $\Rightarrow \int_a^x f(t) dt = 0 (\forall x \in [a, b])$

$$\left[\int_a^x f(t) dt \right]' = f(x) = 0 (x \in [a, b])$$

结论② 正确. 由条件 $\Rightarrow$

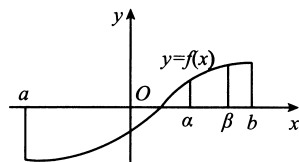
$$0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^b f(x) dx = 0 (\forall x \in [a, b])$$

$$\Rightarrow \int_a^x f(t) dt = 0 (x \in [a, b]) \Rightarrow f(x) = 0 (x \in [a, b]).$$

结论③ 错误, 如图所示, 由定积分几何意义知,

$$\int_a^\beta f(x) dx < 0, \int_\beta^b f(x) dx > 0.$$

其中 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. 因此选(C).



【评注】 结论①②的证明也可用反证法.

若 $f(x) \neq 0 (x \in [a, b])$, 则 $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f(x_0) > 0$. 由连续性 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ 时 $f(x) > 0$

$$\Rightarrow \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx > 0,$$

与①中 $[a, b]$ 的任意子区间 $[a, \beta]$ 上 $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ 矛盾了, 因此只能是

$$f(x) = 0 (\forall x \in [a, b]),$$

在②中此时

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x) dx$$

$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx > 0.$$

与 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 矛盾了. 因此 $f(x) = 0 (\forall x \in [a, b])$.

199 【答案】 C

【分析】 展开 $(x+2|x|)^2 = x^2 + 2x|x| + 4x^2$, 并注意到奇偶性,

$$\int_{-1}^1 (x+2|x|)^2 \sqrt{1-x^2} dx = 10 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

再命 $x = \sin t$,



$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 10 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = 10 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t) dt = 10 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - 10 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt \\
 &= 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 10 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{8} \pi.
 \end{aligned}$$

【评注】 请随时注意: ① 利用奇偶性化简对称区间上定积分再计算; ② 利用华里士公式计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

200 【答案】 C

【分析】 这是一个反常积分, 可以按定积分那样作变量变换.

$$\text{命 } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t, x \rightarrow -1^+ \text{ 时 } t \rightarrow +\infty; x = 1 \text{ 时 } t = 0. x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt,$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int_{+\infty}^0 \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2} dt = -2 \int_0^{+\infty} t d\left(\frac{1}{1+t^2}\right) \\
 &= -2 \left(\frac{t}{1+t^2} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \right) \\
 &= -2 \left(0 - \arctan t \Big|_0^{+\infty} \right) = \pi.
 \end{aligned}$$

另法 由 $\int_{+\infty}^0 \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2} dt$ 作变量变换, 命 $t = \tan u$, 有 $dt = \sec^2 u du$, $t = 0$ 时 $u = 0$,

$t \rightarrow +\infty$ 时 $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int_{+\infty}^0 \frac{-4t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-4 \tan^2 u}{\sec^4 u} \cdot \sec^2 u du \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 2 \cos 2u) du \\
 &= (2u - \sin 2u) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.
 \end{aligned}$$

201 【答案】 B

【分析】 方法 1 $I = \int_0^{\pi} x |\cos x| \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cos x \sin x dx$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \cos 2x + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x d \cos 2x \\
 &= -\frac{1}{4} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{1}{4} x \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x dx \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

方法 2 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(t + \frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\cos^2 \left(t + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^4 \left(t + \frac{\pi}{2}\right)} dt$

$$= 0 + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t} dt$$



$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{\pi}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{方法 3} \quad \int_0^{\pi} x \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

【评注】 若函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则有

$$(1) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx;$$

$$(2) \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

202 【答案】 B

【分析】 比较 I_1 与 I_2 的大小, 只须比较 $\frac{\sin x}{x}$ 与 $\frac{x}{\sin x}$ 的大小, 又只须比较 $\sin^2 x$ 与 x^2 的大小.

已知 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $\sin x < x$,

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{x}{\sin x},$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} dx = I_2.$$

现在进一步考察 I_1, I_2 与 1 的大小关系. 为了比较定积分, 注意 $1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx$, 转化为比较 $\frac{\sin x}{x}$ 或 $\frac{x}{\sin x}$ 与 $\frac{2}{\pi}$ 的大小关系.

方法 1 注意 $\frac{\sin x}{x} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$. 考查 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的单调性

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2},$$

令 $g(x) = x \cos x - \sin x \Rightarrow g'(x) = -x \sin x < 0 \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$,

又 $g(0) = 0 \Rightarrow g(x) < 0 \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$,

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} = \frac{\sin x}{x} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} < \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

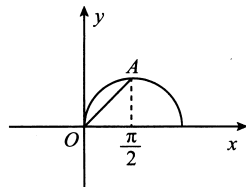
$$\Rightarrow 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = I_1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}.$$

因此 $I_2 > I_1 > 1$. 选(B).

方法 2 比较 $\frac{\sin x}{x}$ 与 $\frac{2}{\pi}$ 的大小转化为比较 $\sin x$ 与 $\frac{2}{\pi}x$ 的大小.

由于 $y = \sin x$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 是凸函数. 由凸函数的性质知, O 与

$A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 的连线在曲线 $y = \sin x$ 的下方 $\left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$



$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}x < \sin x \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > 1. \text{ 因此选(B).}$$

203 【答案】 C

【分析】 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x^2+2x}{1+x^2} dx = \pi;$

因为 $e^x \geq 1+x, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx < \pi;$

又因为 $1 + \sqrt{\cos x} \geq 1, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx > \pi, \text{ 故 } K > M > N.$

204 【答案】 B

【分析】 先求 $F'(x) = \int_0^{x^2} \ln(1+t^2) dt$

再求
$$F''(x) = 2x \ln(1+x^4) \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ = 0, & x = 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是凸的, 在 $(0, +\infty)$ 是凹的. 因此, 选(B).

205 【答案】 C

【分析】 作积分变量变换, 命 $2x-t=u$, 题目等式化为

$$2x \int_x^{2x} f(u) du - \int_x^{2x} u f(u) du = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

两边对 x 求导, 得

$$2 \int_x^{2x} f(u) du - x f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

命 $x=1$ 代入得 $2 \int_1^2 f(u) du = f(1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 所以 $\int_1^2 f(u) du = \frac{3}{4}$.

【例证】 上、下限都含变量时的变限积分函数求导定理如下: “设 $f(x)$ 连续, $\varphi_2(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 均可导, 则

$$\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(u) du \right]' = f[\varphi_2(x)] \varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)] \varphi_1'(x). \quad (*)$$

由

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(u) du &= \int_a^{\varphi_2(x)} f(u) du + \int_{\varphi_1(x)}^a f(u) du \\ &= \int_a^{\varphi_2(x)} f(u) du - \int_a^{\varphi_1(x)} f(u) du \end{aligned}$$

即可获得(*)的证明.



206 【答案】 C

【分析】 因 $\int_0^{+\infty} e^{|x|} \sin 2x dx = \int_0^{+\infty} e^x \sin 2x dx = \frac{e^x (\sin 2x - 2\cos 2x)}{5} \Big|_0^{+\infty}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (\sin 2x - 2\cos 2x)}{5} + \frac{2}{5}.$$

又因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (\sin 2x - 2\cos 2x)}{5}$ 不存在, 所以 $\int_0^{+\infty} e^{|x|} \sin 2x dx$ 发散, 因此 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|x|} \sin 2x dx$ 发散.

207 【答案】 B

【分析】

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{x^2 + bx + 1}{x(x+2)} - 1 \right] dx = \int_1^{+\infty} \frac{(b-2)x + 1}{x(x+2)} dx.$$

若 $b \neq 2$, 则由

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{(b-2)x + 1}{x(x+2)} = b-2 \neq 0,$$

知 $\int_1^{+\infty} \left[\frac{x^2 + bx + 1}{x(x+2)} - 1 \right] dx$ 发散. 由于题设收敛, 所以只能 $b = 2$.

取定 $b = 2$,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \left[\frac{x^2 + bx + 1}{x(x+2)} - 1 \right] dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+2)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 1 - 1} dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x+2} \Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

选(B).

【评注】 也可以不用判别法, 直接计算积分:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(b-2)x + 1}{x(x+2)} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_1^x \frac{(b-2)x}{x(x+2)} dx + \int_1^x \frac{1}{x(x+2)} dx \right]$$

对于前一个反常积分, 若 $b \neq 2$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{(b-2)x}{x(x+2)} dx &= (b-2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dx}{x+2} \\ &= (b-2) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+2) - \ln 3] = +\infty \text{ (发散)}. \end{aligned}$$

对于后一个反常积分

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dx}{x(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

所以当 $b \neq 2$ 时原反常积分发散, 当 $b = 2$ 时, 前一个积分为零, 后一个积分为 $\frac{1}{2} \ln 3$. 选(B).

208 【答案】 A

【分析】 方法1 $x = 0$ 是(A)的瑕点.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sin x} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx,$$



以 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 为例.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx &= \int_0^1 \frac{dx}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int_0^1 \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}} \\ &= \ln \tan \frac{x}{2} \Big|_{0^+}^1 = \infty.\end{aligned}$$

所以 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 发散, 从而知 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 发散. 选(A).

方法2 用比较判别法,

因 $x \rightarrow 0$ 时 $\sin x \sim x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} / \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

又 $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ 发散, 由比较判别法的极限形式 $\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ 发散, 从而知 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sin x}$ 发散. 选(A).

方法3 (B) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi$.

(C) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(D) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$.

因此(B)(C)(D) 均收敛, 选(A).

209 【答案】 A

【分析】 设总收益函数为 $R = R(Q)$, 则 $R(0) = 0$, 且边际收益函数

$$MR = \frac{dR}{dQ} = \frac{ab}{(Q+b)^2} - k$$

于是

$$\begin{aligned}R(Q) &= R(0) + \int_0^Q \left[\frac{ab}{(q+b)^2} - k \right] dq = - \left(\frac{ab}{q+b} + kq \right) \Big|_0^Q \\ &= - \left(\frac{ab}{Q+b} + kQ \right) + a = a \left(1 - \frac{b}{Q+b} \right) - kQ \\ &= \frac{aQ}{Q+b} - kQ = Q \left(\frac{a}{Q+b} - k \right)\end{aligned}$$

又因 $R(Q) = pQ$, 从而 $p = \frac{a}{Q+b} - k \Leftrightarrow Q = \frac{a}{p+k} - b$.

故应选(A).

微分方程(差分方程)

A 组

210 【答案】 D

【分析】 由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程 $y' + p(x)y = 0$ 的两个不同的特解, 故 $y_1(x) -$



$y_2(x)$ 为该方程的一个非零解, 则 $y = C(y_1(x) - y_2(x))$ 为该方程的通解.

【评注】 由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都可能是原方程的零解, 则(A)和(B)都不正确.

211 【答案】 C

【分析】 解线性方程 $xf'(x) = f(x) + \frac{3}{2}ax^2$ 得

$$f(x) = Cx + \frac{3}{2}ax^2$$

由题设知

$$2 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(Cx + \frac{3}{2}ax^2 \right) dx = \frac{C}{2} + \frac{a}{2}$$

则

$$C = 4 - a$$

$$f(x) = (4 - a)x + \frac{3}{2}ax^2.$$

212 【答案】 B

【分析】 注意到 $2y_1(x) - y_2(x)$ 是方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的解, 以及 $y_3(x) - 2y_4(x)$ 是方程 $y'' + py' + qy = -g(x)$ 的解.

由叠加原理, $2y_1(x) - y_2(x) + y_3(x) - 2y_4(x)$ 是方程 $y'' + py' + qy = f(x) - g(x)$ 的解, 所以选择(B).

213 【答案】 D

【分析】 微分方程对应的齐次微分方程是: $y'' - 3y' + 2y = 0$, 其特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 其特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

因此微分方程 $y'' - 3y' + 2y = -2e^x$ 有形如 $y_1^* = ce^x$ 的特解.

又微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 3x$ 有形如 $y_2^* = ax + b$ 的特解. 所以, 由叠加原理知, 原方程 $y'' - 3y' + 2y = 3x - 2e^x$ 有形如 $y^* = y_1^* + y_2^* = ce^x + (ax + b)$ 的特解, 应选(D).

【评注】 经计算可确定常数 $a = \frac{3}{2}, b = \frac{9}{4}, c = 2$.

214 【答案】 C

【分析】 由题设知 $y = y(x)$ 是 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ 满足 $y(0) = 0, y'(0) = 2$ 的特解. 对应的特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, 特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. 从而对应的齐次微分方程的通解为 $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$. 因非齐次项 $f(x) = e^{3x}$, 从而可设非齐次微分方程 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ 具有形式为 $y^* = Ax^2e^{3x}$ 的特解. 代入原方程可确定常数 $A = \frac{1}{2}$, 即原方程的通解为

$$y = \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{3x},$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = 2$ 可确定 $C_1 = 0, C_2 = 2$. 故所求曲线的方程为

$$y = \left(2x + \frac{1}{2}x^2 \right) e^{3x} = \frac{x}{2}(x + 4)e^{3x}.$$



应选(C).

【评注】 按选项特点((A)(B)(D)中均含三角函数), 求出特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, 写出通解形式 $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + A x^2 e^{3x}$ 后不必再计算就可选(C).

215 【答案】 D

【分析】 微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的特征方程是 $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, 特征根是 $\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$, 方程的非齐次项 $f(x) = e^x \cos 2x = e^{\alpha x} \cos \beta x, \alpha \pm i\beta = 1 \pm 2i$ 是特征根.

按照选取特解的规则应设非齐次微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$ 具有形式为 $y^* = x e^x (a \cos 2x + b \sin 2x)$ 的特解, 其中 a 与 b 是待定常数.

记 $y_1 = e^x \cos 2x, y_2 = e^x \sin 2x$, 则

$$y^* = x(ay_1 + by_2),$$

$$y^{*'} = x(ay_1' + by_2') + (ay_1 + by_2),$$

$$y^{*''} = x(ay_1'' + by_2'') + 2(ay_1' + by_2'),$$

从而

$$\begin{aligned} & y^{*''} - 2y^{*'} + 5y^* \\ &= x[a(y_1'' - 2y_1' + 5y_1) + b(y_2'' - 2y_2' + 5y_2)] + 2a(y_1' - y_1) + 2b(y_2' - y_2) \\ &= 2a(y_1' - y_1) + 2b(y_2' - y_2) \\ &= 2ae^x(\cos 2x - 2\sin 2x - \cos 2x) + 2be^x(\sin 2x + 2\cos 2x - \sin 2x) \\ &= -4ae^x \sin 2x + 4be^x \cos 2x. \end{aligned}$$

要使 y^* 是方程的特解, 待定系数应满足 $a = 0, b = \frac{1}{4}$, 即微分方程

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x,$$

有特解

$$y^* = \frac{1}{4} x e^x \sin 2x.$$

故应选(D).

216 【答案】 D

【分析】 方程的通解 $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$, 按题意还满足: $y(\pi) = -1, y'(\pi) = 1$

$\Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -\frac{1}{3}$, 应选(D).

217 【答案】 A

【分析】 这是一阶线性微分方程, 标准形式是 $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2}$.

用 $\mu(x) = e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = \frac{1}{1+x^2}$ 同乘方程两端即得

$$\frac{y'}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}y = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

即 $\left(\frac{y}{1+x^2}\right)' = \frac{x}{(1+x^2)^2}$, 积分并用 $y^*(0) = 1$ 求出特解 $y^*(x)$:



$$\int_0^x \left(\frac{y^*}{1+x^2} \right)' dx = \int_0^x \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\frac{y^*(x)}{1+x^2} - 1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}$$

于是所求特解 $y^*(x) = \frac{3}{2}(1+x^2) - \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}x^2$. 求定积分可得

$$\int_0^1 y^*(x) dx = \int_0^1 (1 + \frac{3}{2}x^2) dx = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

故应选(A).

B 组

218 【答案】 D

【分析】 当 $x \geq 2$ 时将题设的等式两边对 x 求导数, 得

$$g[f(x)]f'(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x) + 1. \quad (*)$$

由于 $g[f(x)] \equiv x$, 从(*)式可得

$$xf'(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x) + 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x)f'(x) + 2xf(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)f'(x) + 2f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 f'(x) + 2(x-1)f(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$\Leftrightarrow [(x-1)^2 f(x)]' = \frac{1}{x} - 1. \quad (**)$$

将(**)式两边在区间 $[2, 4]$ 上求定积分, 并利用 $f(2) = 1$ 就有

$$(x-1)^2 f(x) \Big|_2^4 = \int_2^4 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow 9f(4) - f(2) = \ln x \Big|_2^4 - 2$$

$$\Leftrightarrow f(4) = \frac{1}{9}(\ln 2 - 1).$$

故应选(D).

219 【答案】 D

【分析】 一阶线性微分方程 $xy' - 2y = -4x$ 可化为标准形式 $y' - \frac{2}{x}y = -4$, 方程两边

同乘 $e^{\int -\frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$ 得 $\left(\frac{y}{x^2} \right)' = -\frac{4}{x^2}$, 积分得

$$\frac{y}{x^2} = \frac{4}{x} + C,$$

于是得通解为 $y = Cx^2 + 4x$. 由于对任何常数 C 都有 $y(0) = 0$, 从而由曲线 $y = Cx^2 + 4x$ 与直线 $x = 1$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V(C) = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 (Cx^2 + 4x)^2 dx$$



$$= \pi \int_0^1 (C^2 x^4 + 8Cx^3 + 16x^2) dx = \pi \left(\frac{C^2}{5} + 2C + \frac{16}{3} \right).$$

由于

$$V'(C) = \pi \left(\frac{2C}{5} + 2 \right) \begin{cases} < 0, & C < -5 \\ = 0, & C = -5 \\ > 0, & C > -5 \end{cases}$$

可见当 $C = -5$ 时 $V(C)$ 最小, 即函数 $f(x) = 4x - 5x^2$.

220 【答案】 A

【分析】 方法 1 由二阶线性微分方程解的性质与结构知, 相应的齐次方程 $y'' + ay' + by = 0$ 有两个线性无关的解: $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^x$, 于是相应的特征根是 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, 特征方程是

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0, \text{ 即 } \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

故 $a = 1, b = -2$, $y^* = x^2 e^x$ 是方程

$$y'' + y' - 2y = (cx + d)e^x$$

的解, $y^{*'} = (x^2 + 2x)e^x$, $y^{*''} = (x^2 + 4x + 2)e^x$, 代入得

$$y^{*''} + y^{*'} - 2y^* = (6x + 2)e^x = (cx + d)e^x,$$

$\Rightarrow c = 6, d = 2$.

因此选(A).

方法 2 把 $y^* = e^{-2x} + (x^2 + 2)e^x$, $(y^*)' = -2e^{-2x} + (x^2 + 2x + 2)e^x$, $(y^*)'' = 4e^{-2x} + (x^2 + 4x + 4)e^x$ 代入微分方程可得

$$\begin{aligned} & (y^*)'' + a(y^*)' + by^* \\ &= (4 - 2a + b)e^{-2x} + (1 + a + b)x^2 e^x + (4 + 2a)xe^x + (4 + 2a + 2b)e^x \\ &\stackrel{\text{令}}{=} (cx + d)e^x \end{aligned}$$

就有

$$\begin{cases} 4 - 2a + b = 0 \\ 1 + a + b = 0 \\ 4 + 2a = c \\ 4 + 2a + 2b = d \end{cases}$$

不难由前两个方程求得 $a = 1, b = -2$, 把它们代入后两个方程又可得到 $c = 6, d = 2$, 故应选(A).

221 【答案】 B

【分析】 由 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$, $y_3 = 3e^x$ 是所求方程的三个特解知, $r = -1, -1, 1$ 为所求三阶常系数线性齐次微分方程的特征方程的三个根, 则其特征方程为

$$(r - 1)(r + 1)^2 = 0$$

即

$$r^3 + r^2 - r - 1 = 0$$

对应的微分方程为

$$y''' + y'' - y' - y = 0$$

故应选(B).

222 【答案】 D

【分析】 方法 1 按题设, 存在某二元函数 $u(x, y)$,



$$du = [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$$

$$\text{即 } \frac{\partial u}{\partial x} = [f(x) - e^x] \sin y, \frac{\partial u}{\partial y} = -f(x) \cos y.$$

由于 $f(x)$ 有一阶连续导数, 可知 $u(x, y)$ 有连续的二阶偏导数, 于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

$$\text{即 } \frac{\partial}{\partial x}(-f(x) \cos y) = \frac{\partial}{\partial y}([f(x) - e^x] \sin y). \text{ 由此得 } f'(x) + f(x) = e^x, \text{ 解此方程得}$$

$$f(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C \right), \text{ 由 } f(0) = 0 \text{ 得 } C = -\frac{1}{2}, \text{ 故 } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

应选 (D).

方法 2 按题设, 存在某二元函数 $u(x, y)$ 使得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = [f(x) - e^x] \sin y \quad ①$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -f(x) \cos y \quad ②$$

由式 ② 对 y 积分得

$$u(x, y) = -f(x) \sin y + C(x)$$

再对 x 求偏导数并由式 ① 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -f'(x) \sin y + C'(x) = [f(x) - e^x] \sin y$$

于是得

$$[f'(x) + f(x) - e^x] \sin y - C'(x) = 0$$

即

$$f'(x) + f(x) = e^x, C(x) = C(\text{任意常数}).$$

$$\text{由此及 } f(0) = 0 \text{ 解得 } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ 选 (D).}$$

223 【答案】 A

【分析】 二阶常系数线性微分方程 $y'' - y = x^2$ 的特征方程与特征根分别是 $\lambda^2 - 1 = 0$ 与 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. 又方程有形如 $y^* = Ax^2 + Bx + C$ 的特解, 代入方程得

$$2A - (Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

于是可确定 $A = -1, B = 0, C = 2A = -2$. 故方程 $y'' - y = x^2$ 的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 2.$$

为了得到符合题目要求的解 $\varphi(x)$, 只需从条件

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2}{x^2} = 1$$

确定其中的常数 C_1 和 C_2 . 利用极限的四则运算法则有

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2}{x^2} \cdot x^2 = 1 \cdot 0 = 0 & ① \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2}{x^2} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0 & ② \end{cases}$$

于是有

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} (C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2) = C_1 + C_2 - 2,$$



即 $C_1 + C_2 = 2$. 把它代入 ②, 又有

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_1 - C_2}{x} \\ &= C_1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + C_2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = C_1 - C_2, \end{aligned}$$

即 $C_1 = C_2$. 综合即得 $C_1 = C_2 = 1$. 故所求的解 $\varphi(x) = e^x + e^{-x} - x^2 - 2$.

【评注】 直接计算可得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{x^2} = -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} \\ &= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = -1 + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x}) = 0. \end{aligned}$$

即 $\varphi(x)$ 确实是符合题目要求的特解.

224 【答案】 B

【分析】 线性常系数齐次微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, 特征值为 $\lambda = 1$ (二重), 所以微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 满足 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 的解为 $y = e^x + x e^x$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2e^x + x e^x},$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2e^x + x e^x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2e^x + x e^x} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{3e^x + x e^x}{(2e^x + x e^x)^3}.$$

多元函数微分学

A 组

225 【答案】 D

【分析】 因为

$$f\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right) = \frac{xy - x^2}{x - 2y} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{xy} - \frac{2}{x^2}}.$$

令 $\frac{1}{y} = u, \frac{1}{x} = v$, 则 $f(u, v) = \frac{v - u}{uv - 2v^2}$, 所以, $f(x, y) = \frac{y - x}{xy - 2y^2}$. 故选 (D).

226 【答案】 D

【分析】 由于 $\lim_{\substack{y=x \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4 + x^2} = 0$,

$$\lim_{\substack{y=x^2 \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2},$$

则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在, 从而 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续, 从而不可微, 故应选 (D).



227 【答案】 B

【分析】 $f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$

由对称性知, $f'_y(0,0) = 0$. 而

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - [f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

不存在.

事实上 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = k\Delta x}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2 + k^2(\Delta x)^2} = \frac{k}{1+k^2}$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微. 应选(B).

【评注】 本题中的函数给出了一个偏导数存在但不可微的例子.

228 【答案】 D

【分析】 由于偏导数本质上就是一元函数的导数, 则由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$ 可知, $f(x,y)$ 关于变量 x 是单调增加的, 而关于变量 y 是单调减的. 因此, 当 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ 时

$$f(x_1, y_1) < f(x_2, y_1), f(x_2, y_1) < f(x_2, y_2)$$

从而有

$$f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$$

故应选(D).

229 【答案】 D

【分析】 $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right),$

$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ 则}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 + x^2}.$$

则 $f(1) = 1, f'(1) = 1$, 故应选(D).

230 【答案】 C

【分析】 因为 $f(x+y, x-y) = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, 令 $x+y = u, x-y = v$, 则有 $f(u,v) = uv$, 故 $f(x,y) = xy$, 所以 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y + x = x + y$. 故应选(C).



231 【答案】 C**【分析】** 令 $F(x, y, z) = y + z - xf(y^2 - z^2)$, 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-f}{1+2xz f'} = \frac{f}{1+2xz f'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{1-2xy f'}{1+2xz f'},$$

$$\text{所以 } x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xf - z + 2xyz f'}{1+2xz f'} = \frac{xf - xf + y + 2xyz f'}{1+2xz f'} = y.$$

故应选(C).

232 【答案】 B**【分析】** 将方程两边求全微分, 得

$$dz - dy + 2e^{z-x-y}dx + 2xe^{z-x-y}(dz - dx - dy) = 0, \quad (*)$$

在上式中令 $x = 0, y = 1$ 并利用 $z(0, 1) = (y - 2xe^{z-x-y}) \Big|_{(0,1)} = 1$ 即得

$$dz \Big|_{(0,1)} - dy + 2e^{1-0-1}dx = 0,$$

故 $dz \Big|_{(0,1)} = -2dx + dy$, 即应选(B).**【评注】** (1) 因为本题要求 z 在点 $(0, 1)$ 处的全微分, 从而在求出 $(*)$ 式后不必先解出 dz 而后再令 $x = 0, y = 1, z = 1$. 直接在 $(*)$ 式中令 $x = 0, y = 1, z = 1$ 并解出 dz 较简.(2) 也可以先求出 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)}$ 而后写出 dz . 不过这比**【分析】**中给出的计算方法要麻烦一些. 读者可以自己算一算作为练习.**233 【答案】 A****【分析】** 由 $z = xf(x-y) + yg(x+y)$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f + xf' + yg', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -xf' + g + yg',$$

$$\text{所以 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f' + f' + xf'' + yg'' = 2f' + xf'' + yg'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xf'' + g' + g' + yg'' = xf'' + 2g' + yg'',$$

$$\text{故 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f' - 2g' = 2(f' - g'),$$

应选(A).

234 【答案】 B**【分析】** 将方程两边求全微分, 可得

$$3(xdy + ydx) + 2dx - 4dy - dz = e^z dz,$$

由此即知

$$dz = \frac{1}{1+e^z}[(2+3y)dx + (3x-4)dy],$$



于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2+3y}{1+e^z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3x-4}{1+e^z}$ 以及 $\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,1)} = \frac{5}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}$.

继续求二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2+3y}{1+e^z} \right) = \frac{3}{1+e^z} - \frac{2+3y}{(1+e^z)^2} \cdot e^z \frac{\partial z}{\partial y},$$

在上式中令 $x=1, y=1$, 并利用 $z(1,1)=0$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}$ 即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\bigg|_{(1,1)} = \frac{3}{2} - \frac{5}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{5}{8} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}.$$

故应选(B).

235 【答案】 D

【分析】 $f'_x = 2kx$, $f'_y = 3y^2 - 3$, 显然

$$f'_x(0,1) = 0, f'_y(0,1) = 0$$

$$A = f''_{xx}(0,1) = 2k, C = f''_{yy}(0,1) = 6, B = f''_{xy}(0,1) = 0$$

$AC - B^2 = 12k$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处是否取得极值与 k 的取值有关.

236 【答案】 D

【分析】 $f'_x(x,y) = y(a-x-y) - xy$

$$f'_y(x,y) = x(a-x-y) - xy$$

$$f''_{xx}(x,y) = -2y, f''_{xy}(x,y) = a - 2x - 2y, f''_{yy}(x,y) = -2x.$$

显然 $(0,0), (0,a), \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 都是驻点.

在 $(0,a)$ 处, $AC - B^2 = -a^2 < 0 (a \neq 0)$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,a)$ 不取得极值;

在 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 处, $AC - B^2 = \frac{a^2}{3}, A = -\frac{2a}{3}$, 则当 $a > 0$ 时, $f(x,y)$ 在点 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 取极大值;

当 $a < 0$ 时, $f(x,y)$ 在点 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 取极小值.

在 $(0,0)$ 处, $AC - B^2 = -a^2 < 0 (a \neq 0)$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不取得极值, 当 $a = 0$ 时, $f(x,y) = -(x^2y + xy^2)$, 此时 $f(0,0) = 0, f(x,x) = -2x^3$ 在 $(0,0)$ 点的任意邻域内可正可负, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不取得极值, 故应选(D).

237 【答案】 A

【分析】 显然 $f(x,y) = 1+x+y$ 在区域 $x^2+y^2 \leq 1$ 内无驻点, 令

$$F(x,y,\lambda) = 1+x+y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = 1+2\lambda x = 0 \\ F'_y = 1+2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}, \text{得 } x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+\sqrt{2} \text{ 为最大值, } f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1-\sqrt{2} \text{ 为最小值, } (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1.$$

故应选(A).



238 【答案】 C

【分析】 因为 $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, 于是 $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}.$$

又因 $U(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 故 $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ 连续, 从而它们相等, 即

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0.$$

故应选(C).

B 组**239** 【答案】 A

【分析】 这是讨论函数 $f(x, y)$ 的连续性, 偏导数存在性, 可微性及偏导数的连续性之间的关系.

由于 $f(x, y)$ 的两个偏导数都在点 (x_0, y_0) 处连续是 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微的充分条件, $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微则必在该点处连续, 因此(A) 成立.

240 【答案】 A

【分析】 由二元函数 $f(x, y)$ 在某点 (x_0, y_0) 的可微性和它的偏导数的关系可知: 函数 $f(x, y)$ 的两个偏导数在点 (x_0, y_0) 处连续是函数 $f(x, y)$ 在该点处可微的充分但非必要条件. 因此选(A).

【评注】 (1) 要熟悉基本定理. 若 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 即 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 的连续性是 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微的充分条件, 但 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微不能保证 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续. 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

易求

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 不连续, 但



$$f(x, y) - f(0, 0) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \rho \cdot \rho \sin \frac{1}{\rho^2} = o(\rho)$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, 即 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微.

(2) 若想通过考察 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 的连续性来讨论 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的可微性时, 只能由 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续时, 可知 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 但若 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 不连续时, 此时不足以判断 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 是否可微, 该方法失效.

241 【答案】 C

【分析】 由于 $0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, (A) 不正确.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

所以, $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处偏导数存在, (B) 不正确.

$$\text{又 } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f'_x(0, 0)\Delta x - f'_y(0, 0)\Delta y}{\rho} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$$

$$\text{由于 } \lim_{\substack{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0) \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3}{2\sqrt{2} |\Delta x|^3} \text{ 不存在, 则}$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$$

不存在, 故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微, 故应选 (C).

【评注】 用定义判定 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是否可微分以下两步进行:

(1) 用定义判断 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 是否都存在, 如果都存在则进行下一步, 否则, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处不可微.

$$(2) \text{ 考察极限 } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - [f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\rho}$$

是否为零. 如果此极限为零, 则函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 否则不可微.

242 【答案】 B

$$\text{【分析】 } f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{x} = 0$$

$$\text{或 } f'_x(0, 0) = \left. \frac{d}{dx} [f(x, 0)] \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} (1) \right|_{x=0} = 0$$

由对称性知 $f'_y(0, 0) = 0$, 则命题 (1) 是正确的.

$$\text{又 } f'_x(x, 0) = \left. \frac{d}{dx} [f(x, 0)] \right| = \left. \frac{d}{dx} (1) \right| = 0, \text{ 则}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0) = 0 = f'_x(0, 0).$$

由对称性知 $\lim_{y \rightarrow 0} f'_y(0, y) = f'_y(0, 0)$, 则命题(2)也是正确的.

当 $x \neq 0$ 时

$$f'_y(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy - 1}{y} = \infty,$$

则 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_y(x, y)$ 不存在, 从而 $f'_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续, 由对称性知 $f'_x(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续, 则(3)不正确.

由于 $\lim_{\substack{y=x \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. 而 $f(0, 0) = 1$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续, 从而 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微, 则(4)不正确. 故应选(B).

243 【答案】 D

【分析】 先求 f'_x 和 f'_y .

$x^2 + y^2 \neq 0$ 时

$$f'_x = \frac{4x^3(x^2 + y^2) - 2x(x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y = \frac{-4y^3(x^2 + y^2) - 2y(x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{由 } f(x, 0) = x^2 (\forall x), f(0, y) = -y^2 (\forall y)$$

$$\Rightarrow f'_x(0, 0) = 0, f'_y(0, 0) = 0$$

$$\text{注意 } \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1, \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow |f'_x| \leq 4|x| + 2|x| + 2|x| = 8|x|$$

$$|f'_y| \leq 4|y| + 2|y| + 2|y| = 8|y|$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_x = 0 = f'_x(0, 0), \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_y = 0 = f'_y(0, 0)$$

因此 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续, 从而 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微. 选(D).

244 【答案】 D

【分析】 由 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_x(x, y) = f'_x(0, 0)$ 和 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_y(x, y) = f'_y(0, 0)$ 可知 $f(x, y)$ 的两个一阶偏导数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微, 故应选(D).

245 【答案】 D

【分析】 由题设知 $y = y(x)$ 与 $z = z(x)$ 是由方程组

$$\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

确定的两个隐函数, 将方程组中每个方程看成关于 x 的恒等式并对 x 求导数, 得

$$\begin{cases} z' = 2x + 4yy' \\ 2x - y - xy' + 2yy' = 0 \end{cases} \quad (*)$$

用 $x = 1, y(1) = 1$ 代入 $(*)$ 可得

$$\begin{cases} z'(1) = 2 + 4y'(1) \\ 2 - 1 - y'(1) + 2y'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(1) = -1 \\ z'(1) = -2 \end{cases}$$



将方程组(*)中每个方程看成关于 x 的恒等式,对 x 求导数,得

$$\begin{cases} z'' = 2 + 4(y')^2 + 4yy'' \\ 2 - y' - y' - xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0 \end{cases}$$

用 $x = 1, y(1) = 1$ 和 $y'(1) = -1$ 代入上面所得的方程组即得

$$\begin{cases} z''(1) = 2 + 4 + 4y''(1) \\ 2 + 2 - y''(1) + 2 + 2y''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''(1) = -6 \\ z''(1) = -18 \end{cases}$$

故应选(D).

246

【答案】 D

【分析】 将方程组中每个方程两端求全微分,得

$$\begin{cases} dx = du + zdv + vdz, \\ dy = -2udu + dv + dz, \end{cases}$$

由此可解出

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{2uz+1} [dx - zdy + (z-v)dz], \\ dv &= \frac{1}{2uz+1} [2udx + dy - (2uv+1)dz], \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2uz+1}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z-v}{2uz+1}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2uz+1}.$$

在点(2,1,1)处 $u(2,1,1)$ 与 $v(2,1,1)$ 满足方程组

$$\begin{cases} u(2,1,1) + v(2,1,1) = 2, \\ u^2(2,1,1) - v(2,1,1) = 0, \end{cases}$$

由此可解得满足 $u(2,1,1) > 0$ 的函数值分别是 $u(2,1,1) = v(2,1,1) = 1$,代入即得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{(2,1,1)} = \frac{z-v+2}{2uz+1} \Big|_{(2,1,1)} = \frac{2}{3}$$

故应选(D).

247

【答案】 A

【分析】 求 $F(x,y,z) = 0$ 的全微分得

$$\begin{aligned} 0 &= dF(x,y,z) = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz \\ &= F'_x dx + F'_y dy + F'_z (z'_x dx + z'_y dy) \\ &= (F'_x + F'_z z'_x) dx + (F'_y + F'_z z'_y) dy \end{aligned} \quad (*)$$

在(*)式令 $x = 1, y = 1, z(1,1) = 1$ 即得

$$\begin{aligned} 0 &= [-2 + z'_x(1,1)F'_z(1,1,1)]dx + [2 + 3F'_z(1,1,1)]dy \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z'_x(1,1)F'_z(1,1,1) = 2 \\ 3F'_z(1,1,1) = -2, \end{cases} \\ \Rightarrow z'_x(1,1) &= \frac{2}{F'_z(1,1,1)} = 2 \times \left(-\frac{3}{2} \right) = -3. \end{aligned}$$

故应选(A).

248

【答案】 C

【分析】 $f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0-0}{y} = 0,$



当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'_y(x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = x, \end{aligned}$$

即 $f'_y(x, 0) = x$ (对一切 x 都成立)

$$f''_{yx}(0, 0) = \left. \frac{d}{dx} f'_y(x, 0) \right|_{x=0} = 1,$$

由对称性知 $f''_{xy}(0, 0) = -1$, 故应选(C).

249 【答案】 C

【分析】 方法 1 由题设知

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 + 2xy + 3x^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + x^2$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 + 2xy + 3x^2$ 知

$$f(x, y) = \int (2y^2 + 2xy + 3x^2) dx = 2xy^2 + x^2y + x^3 + \varphi(y)$$

由 $\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + x^2$ 知, $4xy + x^2 = 4xy + x^2 + \varphi'(y)$, $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$, 则

$$f(x, y) = 2xy^2 + x^2y + x^3 + C.$$

$$\begin{aligned} \text{方法 2 } df(x, y) &= (2y^2 + 2xy + 3x^2)dx + (4xy + x^2)dy \\ &= (2y^2 dx + 4xy dy) + (2xy dx + x^2 dy) + 3x^2 dx \\ &= d(2xy^2) + d(x^2y) + dx^3 \end{aligned}$$

则 $f(x, y) = 2xy^2 + x^2y + x^3 + C$.

【评注】 方法 1 是利用偏积分, 方法 2 是利用凑微分. 这两种方法是已知某个函数的全微分或两个一阶偏导数求原函数的两种常用方法.

250 【答案】 B

【分析】 由于

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 8x + 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

的解为 $(0, 0)$, $(2, 2)$. 只有 $(0, 0)$ 在 D 内.

又因为 $A = f''_{xx} = 6x - 8$, $B = f''_{xy} = 2$, $C = f''_{yy} = -2$, 可得在点 $(0, 0)$ 处 $A = -8$, $AC - B^2 > 0$, 所以点 $(0, 0)$ 是极大值点.

注意 $f(0, 0) = 0$, 在 D 的边界上点 $(4, 1)$ 处 $f(4, 1) = 7 > f(0, 0)$, 即 $f(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 在 D 的最大值, $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 在 D 的最大值点. 因此选(B).

【评注】 (1) 本题考察当二元函数的两个偏导数都存在的条件下取得极值的必要条件和充分条件.

(2) 该题表明了多元函数与一元函数的一个区别: 区域 D 上的连续的二元函数 $f(x, y)$ 在 D 内有唯一的极值点, 若是极小(大)值点, 不一定是 $f(x, y)$ 的最小(大)值点.



251 【答案】 D**【分析】** 此问题归结为求函数

$$u = xyz (x > 0, y > 0, z > 0)$$

在条件 $x + y + z = a$ 下的最大值.**方法 1** 用拉格朗日乘数法.

令

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - a)$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0 \end{cases}$$

用 x, y, z 分别乘第一、二、三个方程得 $x = y = z$, 再代入最后一个方程式得

$$x = y = z = \frac{a}{3}$$

由题意最大值一定存在, 因此当 $x = y = z = \frac{a}{3}$ 时 u 取最大值 $\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}$.**方法 2** 化为简单最值问题.从条件 $x + y + z = a$ 中解得 $z = a - x - y$, 代入 $u = xyz$ 得 $u = xy(a - x - y)$, 转化为求函数 $u = xy(a - x - y)$ 在开区域

$$D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x + y < a\}$$

中的最大值. 这个最大值一定存在, 它在 D 内的驻点达到. 令

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y(a - x - y) - xy = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x(a - x - y) - xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + y = a \end{cases}$$

解得

$$x = \frac{a}{3}, y = \frac{a}{3}$$

即 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 是唯一驻点, 也就是最大值点. 因此 u 的最大值是 $u = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}$.**252 【答案】 A**

$$\text{【分析】} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 6 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 8 \end{cases} \cdot \text{令} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x = 3, \\ y = -4. \end{cases}$$

点 $(3, -4)$ 在圆域内, 且 $z(3, -4) = -25$.函数在圆域的边界线 $x^2 + y^2 = 100$ 上的极值问题实际上是函数 $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y$ 在满足条件 $x^2 + y^2 = 100$ 下的极值问题.

可用拉格朗日乘数法求解.

作拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + \lambda(x^2 + y^2 - 100)$, 并令

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 6 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 8 + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 100 = 0 \end{cases}$$

$$\text{有} \begin{cases} (1+\lambda)x - 3 = 0 \\ (1+\lambda)y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = -8 \end{cases} \text{ 及 } \begin{cases} x = -6 \\ y = 8 \end{cases}.$$

于是得到函数在约束条件下可能的极值点分别是 $(6, -8)$ 与 $(-6, 8)$.

计算得 $z(6, -8) = 0, z(-6, 8) = 200$.

由比较可知最大值 $\max\{0, 200, -25\} = 200$; 最小值 $\min\{0, 200, -25\} = -25$.

【评注】 (1) 设函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续. 求其在 D 上的最大值或最小值的步骤如下:

① 求出函数 $z = f(x, y)$ 在 D 内的所有驻点处及至少有一个偏导数不存在的点处的函数值.

② 设 D 是由边界曲线 $F_i(x, y) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 所围成, 求出函数 $z = f(x, y)$ 在约束条件 $F_i(x, y) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 下的所有可能的驻点, 并计算出其函数值.

③ 比较①, ②两组中已计算出的函数值, 其中最大者就是函数 $z = f(x, y)$ 在 D 上的最大值, 最小者就是函数 $z = f(x, y)$ 在 D 上的最小值.

(2) 条件极值应用问题的求解方法.

条件极值应用问题的求解常用拉格朗日乘数法.

例如: 求函数 $z = f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 之下的条件极值的步骤为:

① 引入拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.

② 求拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda)$ 的驻点, 即解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ F'_\lambda = \varphi = 0. \end{cases}$$

③ 在考研试题中通常是条件最大值或最小值的应用问题, 常由问题的实际意义可知存在最大值或最小值. 若驻点唯一即为所求.

又如: 求函数 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 与 $\psi(x, y, z) = 0$ 之下的条件极值的步骤为:

① 引入拉格朗日函数 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$.

② 求拉格朗日函数 $F(x, y, z, \lambda, \mu)$ 的驻点, 即解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0, \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y = 0, \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0, \\ F'_\lambda = \varphi = 0, \\ F'_\mu = \psi = 0. \end{cases}$$

③ 判定各驻点是否为最大、最小值点.



A 组

253 【答案】 C【分析】 原积分域为直线 $y = x, x + y = 2$, 与 y 轴围成的三角形区域, 故应选(C).**254** 【答案】 C【分析】 原积分域应由 $x^2 + y^2 \leq 2y$ 与 $x \geq 0$ 所确定的右半圆, 故应选(C).**255** 【答案】 A【分析】 设 $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) d\sigma$, 由累次积分限, 可得二重积分的积分区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2\}$, 然后再交换积分次序即得(A).**256** 【答案】 A【分析】 引入极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则 $D = \{(r, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \theta\}$, 故

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} (r \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3} \cos \theta + \frac{r^4}{4} \sin^2 \theta \right) \Big|_{r=0}^{r=\cos \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta + \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^4 \theta d\theta \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) \cos^4 \theta d\theta \\
 &= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta d\theta \\
 &= \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{9}{64} \pi.
 \end{aligned}$$

【评注】 在二重积分的计算中有时需要用到公式

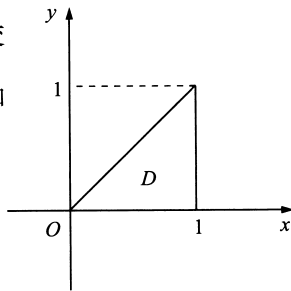
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, n \text{ 是正奇数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, n \text{ 是正偶数.} \end{cases}$$



257 【答案】 A

【分析】 由于不易求得被积函数 $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ 的原函数, 因而考虑交换累次积分的积分次序. 令 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$, 如图. 由于 D 又可表示为 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, 故

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dx &= \iint_D \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} dy \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} \int_0^x y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{d(1+x^3)}{\sqrt{1+x^3}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{1+x^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$



258 【答案】 A

【分析】 连接 OB , 将原积分域分为两部分, $\triangle CBO$, 记为 D_2 , $\triangle BOA$, 记为 D_3 .

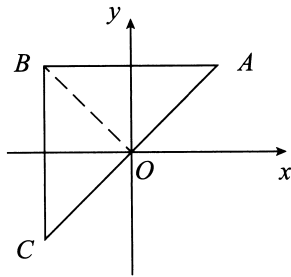
由于 D_2 关于 x 轴对称, 而 $xy + \cos x \sin y$ 是 y 的奇函数, 则

$$\iint_{D_2} (xy + \cos x \sin y) d\sigma = 0$$

而 D_3 关于 y 轴对称, xy 是 x 的奇函数, $\cos x \sin y$ 是 x 的偶函数, 则

$$\iint_{D_3} xy d\sigma = 0, \iint_{D_3} \cos x \sin y d\sigma = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y d\sigma$$

故应选(A).



259 【答案】 D

【分析】 从题设知 $\iint_D y d\sigma = \iint_{D_1} y d\sigma - \iint_{D_2} y d\sigma$.

设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 引入极坐标, 在极坐标系 (r, θ) 中 D_2 可表示为 $\{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta\}$, 从而

$$\iint_{D_2} y d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \sin \theta d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{2}{3} \cos^4 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

记点 $(1, 0)$ 为 N , 则两个直角三角形 $\triangle PMN$ 与 $\triangle OPQ$ 相似, 从而有

$$\frac{PN}{PM} = \frac{PQ}{PO} \Leftrightarrow \frac{a-1}{1} = \frac{\sqrt{2}a}{a} \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} y d\sigma &= \int_0^a dx \int_0^{a-x} y dy = \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 dx = -\frac{1}{6} (a-x)^3 \Big|_0^a \\ &= \frac{a^3}{6} = \frac{(1+\sqrt{2})^3}{6} = \frac{1+3\sqrt{2}+3 \cdot 2+2\sqrt{2}}{6} = \frac{7}{6} + \frac{5}{6}\sqrt{2}. \end{aligned}$$



故 $\iint_D y d\sigma = \frac{7}{6} + \frac{5}{6}\sqrt{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{2}$, 即应选(D).

260 【答案】 C

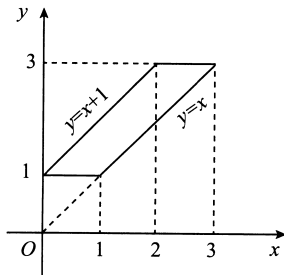
【分析】 对被积函数而言, 先积 x 还是先积 y , 繁简程度差别不大. 但对积分区域 D , 如右图, 若先积 y 后积 x , D 的边界分段表示, 要用分块积分法, 不方便. 选择先积 x 后积 y 的积分顺序则不必分块, D 的表示是:

$$1 \leq y \leq 3, y-1 \leq x \leq y$$

于是

$$\iint_D y d\sigma = \int_1^3 dy \int_{y-1}^y y dx = \int_1^3 y dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_1^3 = 4$$

选(C).



261 【答案】 C

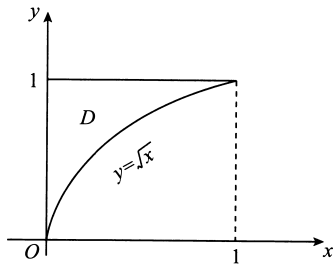
【分析】 积分区域 D 如图. 由被积函数的特点, 应选择先 x 后 y 的积分顺序, D 表示为

$$0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-y^2} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} 2\sqrt{x} \Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 2ye^{-y^2} dy \\ &= -e^{-y^2} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

应选(C).

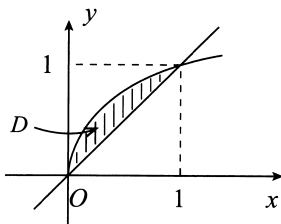


262 【答案】 C

【分析】 由题设知 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}$, 如图所示. 从而

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sin \pi y}{y} d\sigma &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin \pi y}{y} dx = \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{y} dy \int_{y^2}^y dx \\ &= \int_0^1 (1-y) \sin \pi y dy = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-y) d(\cos \pi y) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[(1-y) \cos \pi y \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \pi y d(1-y) \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(-1 + \int_0^1 \cos \pi y dy \right) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \pi y dy \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} \sin \pi y \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

故应选(C).



263 【答案】 C**【分析】** 显然在 D 上 $0 < x + y \leq 1$, 则

$$\ln(x+y)^3 \leq 0, 0 < \sin(x+y)^3 < (x+y)^3$$

从而有

$$\iint_D \ln(x+y)^3 dx dy < \iint_D \sin(x+y)^3 dx dy < \iint_D (x+y)^3 dx dy$$

故应选(C).

【评注】 本题用到一个常用的不等式, 即

$$\sin x < x < \tan x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

264 【答案】 C**【分析】** 等式 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) du dv$ 两端积分得

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D xy dx dy + \iint_D f(u, v) du dv \cdot \iint_D dx dy$$

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy dy = \frac{1}{12}$$

$$\iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy = \frac{1}{3}$$

则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{1}{8},$$

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{8}.$$

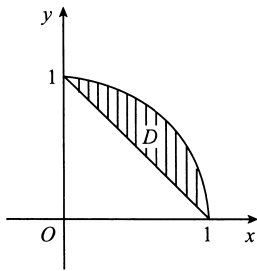
B 组**265 【答案】 B****【分析】** 首先确定被积函数, 由于在极坐标系 (r, θ) 中面积元 $d\sigma = r dr d\theta$, 从而题设二重积分的被积函数应是 $\frac{1}{r} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. 其次由题设知二重积分的积分区域 D 在极坐标系 (r, θ) 中的不等式表示是

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \leq r \leq 1 \right\}$$

这表明 D 在满足 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 的直角坐标系 xOy 中位于第一象限, 且内外边界分别是 $r \cos \theta + r \sin \theta = 1$ 即 $x + y = 1$ 与 $r = 1$ 即 $x^2 + y^2 = 1$, 从而积分区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$, 如图所示.

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr = \iint_D \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma$$



$$= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

应选(B).

266 【答案】 B

【分析】 因为 $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$, 从而可引入坐标轴的平移 $x-1=u, y-1=v$ 即 $x=u+1, y=v+1$, 这时区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}$ 变为区域 $D_1 = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 \leq 2\}$.

二重积分

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + xy + y^2) d\sigma &= \iint_{D_1} [(u+1)^2 + (u+1)(v+1) + (v+1)^2] dudv \\ &= \iint_{D_1} [u^2 + uv + v^2 + 3(u+v) + 3] dudv \\ &= \iint_{D_1} (u^2 + v^2) dudv + \iint_{D_1} [uv + 3(u+v)] dudv + 3 \iint_{D_1} dudv \end{aligned}$$

利用 D_1 关于 u 轴或 v 轴的对称性与函数 $uv + 3(u+v)$ 关于 v 或 u 是奇函数的性质可得

$$\iint_{D_1} [uv + 3(u+v)] dudv = 0, \text{ 利用二重积分的几何意义可得 } \iint_{D_1} dudv = D_1 \text{ 的面积} = 2\pi.$$

最后, 在 D_1 中引入极坐标 $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$, 则 $D_1 = \{(r,\theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$, 于是 $\iint_{D_1} (u^2 + v^2) dudv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot r dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr = \frac{\pi}{2} (\sqrt{2})^4 = 2\pi.$

故 $\iint_{D_1} (x^2 + xy + y^2) d\sigma = 2\pi + 6\pi = 8\pi$. 故应选(B).

267 【答案】 D

【分析】 由于 $x^2 \int_0^{\sin x} \sqrt{1-y^2} dy$ 是 x 的奇函数, $\cos x \int_0^{\sin x} y \sqrt{1-y^2} dy$ 是 x 的偶函数, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sin x} y \cos x \sqrt{1-y^2} dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos^4 x) dx \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

故应选(D).

268 【答案】 B

【分析】 引入极坐标 (r,θ) , 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则

$$D = \left\{ (r,\theta) \mid \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 1 \leq r \leq 3 \right\}, \text{ 且 } \arctan \frac{y}{x} = \theta,$$



故

$$\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \theta d\theta \int_1^3 r dr = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{36} \right) \times \frac{1}{2} (9 - 1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

269 【答案】 D

【分析】 直接计算内层积分比较麻烦,应先将累次积分表成 $\iint_D \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$, 并求出 D ,

然后交换积分顺序. 显然

$$D = \{(x, y) \mid y \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad I &= \int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2 - y^2} dx = \iint_D \sqrt{x^2 - y^2} dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 - y^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{4} \pi x^2 dx = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

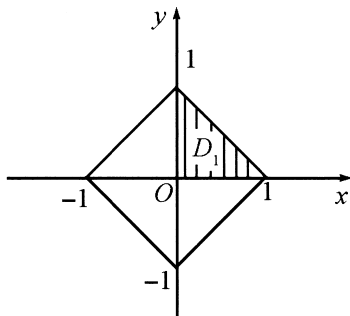
应选(D).

270 【答案】 D

【分析】 由于

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (2-x)(2-y)(1-|x|-|y|) d\sigma \\ &= 4 \iint_D (1-|x|-|y|) d\sigma - 2 \iint_D x(1-|x|-|y|) d\sigma \\ &\quad - 2 \iint_D y(1-|x|-|y|) d\sigma + \iint_D xy(1-|x|-|y|) d\sigma, \end{aligned}$$

而其中后三个二重积分中的被积函数分别是关于 x 或关于 y 的奇函数, 且积分区域 D 分别关于 y 轴或 x 轴对称, 如图. 故后三个二重积分的积分值都是零. 在第一个二重积分中被积函数 $1-|x|-|y|$ 分别关于 x 或 y 是偶函数, 利用积分区域 D 分别关于 x 轴与 y 轴的对称性可得原二重积分



$$I = \iint_D (2-x)(2-y)(1-|x|-|y|) d\sigma = 16 \iint_{D_1} (1-|x|-|y|) d\sigma,$$

其中 D_1 是区域 D 在第一象限部分, 即

$$D_1 = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\},$$

故

$$\begin{aligned} I &= 16 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \\ &= 16 \int_0^1 \left[(1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = 8 \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{8}{3} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

即应选(D).

271 【答案】 D

【分析】 作坐标系的平移, 设 $u = x, v = y - 2$, 则区域 D 变为新直角坐标系 (u, v) 中的区域 $D_1 = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 4\}$, 且



$$\iint_D x^2 y d\sigma = \iint_{D_1} u^2 (v+2) du dv = \iint_{D_1} u^2 v du dv + 2 \iint_{D_1} u^2 du dv.$$

由于 D_1 关于 u 轴对称, 而函数 $u^2 v$ 关于 v 是奇函数, 从而

$$\iint_{D_1} u^2 v du dv = 0.$$

而函数 u^2 分别关于 u 与 v 都是偶函数, 从而又有

$$\iint_{D_1} u^2 du dv = 4 \iint_{D_2} u^2 du dv,$$

其中 D_2 是 D_1 在 $u \geq 0, v \geq 0$ 的部分区域, 即 $D_2 = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq \sqrt{4-u^2}\}$, 故

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y d\sigma &= 8 \iint_{D_2} u^2 du dv = 8 \int_0^2 u^2 du \int_0^{\sqrt{4-u^2}} dv \\ &= 8 \int_0^2 u^2 \sqrt{4-u^2} du \stackrel{u=2\sin\theta}{=} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2\theta \sqrt{4-4\sin^2\theta} d(2\sin\theta) \\ &= 128 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta = 128 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta (1-\cos^2\theta) d\theta \\ &= 128 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta d\theta \right) = 128 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{128}{16} \pi = 8\pi. \end{aligned}$$

即应选(D).

272 【答案】 C

【分析】 用直线 $x+y=0$ 把区域 D 分割成关于直线 $x+y=0$ 对称的两个部分区域 $D_+ = \{(x, y) \mid (x, y) \in D \text{ 且 } x+y \geq 0\} = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 1\}$ 与 $D_- = \{(x, y) \mid (x, y) \in D \text{ 且 } x+y \leq 0\} = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq -x\}$, 如图. 由于被积函数

$$|x+y| = \begin{cases} x+y, & (x, y) \in D_+, \\ -(x+y), & (x, y) \in D_-, \end{cases}$$

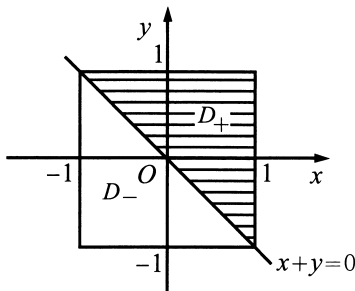
从而用分块积分法可得

$$\iint_D |x+y| d\sigma = \iint_{D_+} (x+y) d\sigma + \iint_{D_-} [-(x+y)] d\sigma = I_+ + I_-.$$

分别计算 I_+ 与 I_- 可得

$$\begin{aligned} \iint_{D_+} (x+y) d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_{-x}^1 (x+y) dy = \int_{-1}^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=-x}^{y=1} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(x + \frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1+x^2) dx = \int_0^1 (1+x^2) dx \\ &= 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\iint_{D_-} [-(x+y)] d\sigma = - \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{-x} (x+y) dy = - \int_{-1}^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=-1}^{y=-x} dx$$



$$= -\int_{-1}^1 \left(-x^2 + \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1+x^2) dx = \frac{4}{3}.$$

代入即知

$$\iint_D |x+y| d\sigma = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

应选(C).

【评注】 由于积分区域 D 关于直线 $x+y=0$ 对称, 而被积函数 $f(x,y)=|x+y|$ 是关于 $x+y$ 的偶函数, 所以直接可得

$$\begin{aligned} \iint_{D_+} |x+y| d\sigma &= \iint_{D_-} |x+y| d\sigma \Rightarrow \iint_D |x+y| d\sigma = 2 \iint_{D_+} |x+y| d\sigma \\ &= 2I_+ = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

273 【答案】 B

【分析】 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 在极坐标系 (r, θ) 中积分区域

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \leq r \leq \frac{2}{\cos\theta + \sin\theta} \right\}, \text{ 从而}$$

$$\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{1}{r} dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

为计算所得的定积分, 可作变换 $\tan \frac{\theta}{2} = t$, 于是 $\theta = 2\arctan t$, 从而

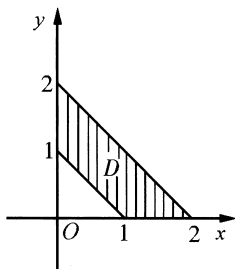
$$d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ 且 } \theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t: 0 \rightarrow 1. \text{ 代入}$$

即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \int_0^1 \frac{2dt}{1+2t-t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{2-(1-t)^2}.$$

再令 $1-t=u$, 即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \int_0^1 \frac{2du}{2-u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1).$$



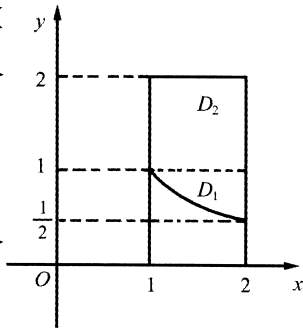
274 【答案】 B

【分析】 如按原积分次序不易积分, 故可考虑先对 x 积分. 又因为要由原累次积分的上下限得积分区域, 但原题中内层积分下限大于上限, 不符合二重积分定限原则, 故利用定积分性质将积分上下限交换. 由

$$I = \int_1^2 dx \int_2^{\frac{1}{x}} y e^{xy} dy = - \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 y e^{xy} dy$$

可得积分区域 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{x} \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 2 \right\}$. 交换积分

次序, D 可写成 $D = D_1 + D_2$, 且



$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \frac{1}{y} \leq x \leq 2 \right\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 2\},$$

从而

$$\begin{aligned} I &= - \iint_D y e^{xy} dx dy = - \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 y e^{xy} dx + \int_1^2 dy \int_1^2 y e^{xy} dx \right) \\ &= - \int_{\frac{1}{2}}^1 (e^{2y} - e) dy - \int_1^2 (e^{2y} - e^y) dy = -\frac{1}{2}e^4 + e^2. \end{aligned}$$

275 【答案】 D

【分析】 方法1 三个积分区域 D_1, D_2 与 D_3 都是分别关于 x 轴与 y 轴对称的, 记它们在第一象限的部分区域分别为 D_{11}, D_{21} 与 D_{31} , 由于被积函数 $|xy|$ 分别是自变量 x 与自变量 y 的偶函数, 故有

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \iint_{D_{11}} |xy| d\sigma = 4 \iint_{D_{11}} xy d\sigma, I_2 = 4 \iint_{D_{21}} |xy| d\sigma = 4 \iint_{D_{21}} xy d\sigma, \\ I_3 &= 4 \iint_{D_{31}} |xy| d\sigma = 4 \iint_{D_{31}} xy d\sigma. \end{aligned}$$

其中 $D_{11} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$, $D_{21} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt[4]{1-x^4}\}$, $D_{31} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$, 从而

$$I_1 = 4 \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = 2 \int_0^1 x(1-x^2) dx = 2 \left(\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^3 dx \right) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 4 \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt[4]{1-x^4}} y dy = 2 \int_0^1 x \sqrt{1-x^4} dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^4} d(x^2) = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \\ &\stackrel{t=\sin \theta}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

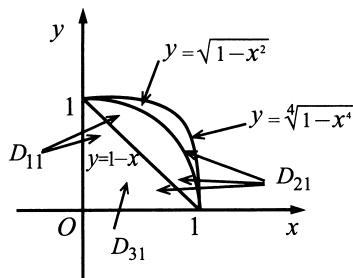
$$\begin{aligned} I_3 &= 4 \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy = 2 \int_0^1 x(1-x)^2 dx = 2 \int_0^1 x(1-2x+x^2) dx = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) \\ &= 2 \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

故 $I_3 < I_1 < I_2$, 即应选(D).

方法2 可以不计算二重积分 I_1, I_2, I_3 的值而直接得出结论. 因为在 D_{11}, D_{21} 与 D_{31} 上被积函数同为 xy 且 $xy \geq 0$ 并不恒等于零, 所以只需确定积分区域 D_{11}, D_{21} 与 D_{31} 的包含关系. 它们的左边界都是 y 轴上的区间 $[0, 1]$, 下边界都是 x 轴上的区间 $[0, 1]$, 而上边界则分别是圆弧 $y = \sqrt{1-x^2}$, 曲线段 $y = \sqrt[4]{1-x^4}$ 以及直线段 $y = 1-x$. 当 $0 < x < 1$ 时由 $0 < x^4 < x^2 < x < 1$ 以及函数 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = \sqrt[4]{x}$ 在 $[0, 1]$ 上单调增加可得

$$0 < 1-x < 1-x^2 < \sqrt{1-x^2} < \sqrt{1-x^4} < \sqrt[4]{1-x^4} < 1,$$

即当 $0 < x < 1$ 时有 $0 < 1-x < \sqrt{1-x^2} < \sqrt[4]{1-x^4} < 1$, 这表明 D_{11}, D_{21} 与 D_{31} 有如图的包含关系, 故 $I_3 < I_1 < I_2$.



线性代数水平自测一答案

本自测题极容易,你应当快速完成测试,毫无压力。

如果你解答这些题还有困难,请自行补课,推荐《考研数学复习全书·基础篇·线性代数基础》。

1. 【答案】 D

【分析】 $2|A|A = -4A$, 则 $|-4A| = (-4)^4|A| = 2^8|A| = -2^9$.

2. 【答案】 C

【分析】 若矩阵 A 的秩为 r , 则 A 至少有一个 r 阶子式不等于 0, 且 A 的所有 $r+1$ 阶子式均等于 0. 故选项 (C) 正确.

3. 【答案】 C

【分析】 显然 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, 于是矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的秩为 3, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 总线性无关.

4. 【答案】 A

【分析】 显然有 $A\eta_1 = b, A\eta_2 = b$, 则

$A(\eta_1 + \eta_2) = A\eta_1 + A\eta_2 = 2b$, 故 $\eta_1 + \eta_2$ 不是 $Ax = 0$ 的解.

$A\left(\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2\right) = \frac{1}{2}A\eta_1 + \frac{1}{2}A\eta_2 = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$, 故 $\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2$ 是 $Ax = b$ 的一个解.

$A(\eta_1 - \eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b - b = 0$, 故 $(\eta_1 - \eta_2)$ 是 $Ax = 0$ 的一个解.

$A(2\eta_1 - \eta_2) = 2A\eta_1 - A\eta_2 = 2b - b = b$, 故 $2\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = b$ 的一个解.

5. 【答案】 B

【分析】 已知实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交, 因为 $|A| < 0$, 故 A 有两个不同的特征值. 而 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 相互正交, 故 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 为 A 的另一个特征值所对应的特征向量.

而对于 (A) 选项, 当 $k = 0$ 时显然 $k\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 不是 A 的特征向量.

对于 (C) 选项, 不同特征值对应特征向量的线性组合显然不是特征向量.

(D) 选项包含 (C) 选项, (D) 也不正确.

6. 【答案】 C

【分析】 当 A 是正定矩阵时, 二次型 $f(x) = x^T Ax$ 的正惯性指数为 n , 故 A 合同于单位矩阵.

7. 【答案】 -5

【分析】 $|4\gamma - \alpha, \beta - 2\gamma, 2\alpha| = |4\gamma, \beta - 2\gamma, 2\alpha| - |\alpha, \beta - 2\gamma, 2\alpha|$
 $= |4\gamma, \beta, 2\alpha| - |4\gamma, 2\gamma, 2\alpha|$
 $= 8|\gamma, \beta, \alpha| = -8|\alpha, \beta, \gamma| = 40.$

故 $|\alpha, \beta, \gamma| = -5.$



8. 【答案】 -32

【分析】 $AA^* = |A|E, A^* = |A|A^{-1}, |A^*| = ||A|A^{-1}| = |A|^2|A^{-1}| = |A| = 2,$
 $|-2B| = (-2)^3|B| = -8 \times 2 = -16.$

$$\begin{vmatrix} O & A^* \\ -2B & O \end{vmatrix} = (-1)^6 |A^*| |-2B| = 2 \times (-16) = -32.$$

9. 【答案】 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 且 $\lambda \neq 1$

【分析】 线性方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda & 2 \\ 5 & -5 & -4 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -2 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 2+\lambda & 3 \\ 0 & 5\lambda-5 & 6 & 5+\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -2 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 2+\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -5\lambda-4 & \lambda-10 \end{bmatrix}$$

当 $-5\lambda-4 \neq 0, \lambda \neq -\frac{4}{5}$ 且 $\lambda-1 \neq 0, \lambda \neq 1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 显然只有唯一解.

10. 【答案】 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$

【分析】 若要使二次型 f 是正定的, 则应有系数矩阵的各阶顺序主子式全为正.

二次型的系数矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix}$, 其各阶顺序主子式

$$D_1 = 2, D_2 = 1, D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2t^2 > 0$$

故 $-\frac{1}{\sqrt{2}} < t < \frac{1}{\sqrt{2}}.$

线性代数水平自测二答案

本自测 10 个小题都是基本的概念与计算, 难度不大. 同学你应当在规定时间内完成解答, 并且不感到有什么困难. 如果确实有困难, 请自行补课, 推荐《考研数学复习全书·基础篇·线性代数基础》。

1. 【答案】 A

【分析】 构造行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

则 $D_1 = 1 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 1 \cdot A_{43} + 1 \cdot A_{44}.$

而对 D_1 按第 3 行展开, 得

$$D_1 = -6 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

故选(A).



2. 【答案】 D

【分析】 $A+B=(\alpha+\beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4)$.

$$\begin{aligned} |A+B| &= |\alpha+\beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4| = 8|\alpha+\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| \\ &= 8(|\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| + |\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|) \\ &= 8(|A| + |B|) = 40. \end{aligned}$$

3. 【答案】 D

【分析】 本题相当于讨论方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$$

无解时, a, b 应满足的条件.

对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 作初等行变换,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & a & b \\ 2 & -1 & 3 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & a-1 & b \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

当 $a=2$ 且 $b \neq 1$ 时, $r(A)=2 \neq r(\bar{A})=3$, 方程组无解, 即 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示. 选(D).

4. 【答案】 A

【分析】 n 个方程 n 个未知数的齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix} = 2-a.$$

5. 【答案】 A

【分析】 本题考查判断矩阵相似对角化的原理.

矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $1, 1$, 且 $\lambda=1$ 只有一个线性无关的特征向量, 故(A) 不能相似对角化.

矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $1, 2$, 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $3, 0$, 都是有 2 个不同的特征值, 必与对角矩阵相似, 而 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 是对称矩阵必与对角矩阵相似.

6. 【答案】 B

【分析】 由已知有

$$PA=B, BP^T=C$$

故 $PAP^T=C$, 选(B).

7. 【答案】 $a^4 - 3a^2b + b^2$

【分析】 直接展开

$$D = a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & a & 1 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 1 \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 &= a(a^3 - 2ab) - b(a^2 - b) \\
 &= a^4 - 3a^2b + b^2
 \end{aligned}$$

或各列加到第1列,有

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ b-a^2 & a & 1 & 0 \\ -ab & b & a & 1 \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ -ab+a(a^2-b) & b & a & 1 \\ b(a^2-b) & 0 & b & a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & b & a & 1 \\ -a^4+3a^2b-b^2 & 0 & b & a \end{vmatrix} = a^4 - 3a^2b + b^2.
 \end{aligned}$$

8. 【答案】 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

【分析】 由 $A^2 - AB = E$, 有

$$AB = A^2 - E$$

因 $|A| = -1$, 矩阵 A 可逆, 上式左乘 A^{-1} , 所以

$$\begin{aligned}
 B &= A - A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

9. 【答案】 $-\frac{3}{2}$

【分析】 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + k\alpha_3, 3\alpha_3 + 2\alpha_1)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & k & 3 \end{bmatrix}$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & k & 3 \end{bmatrix} < 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & k & 3 \end{vmatrix} = 0$.

所以 $k = -\frac{3}{2}$.

10. 【答案】 -1

【分析】 由 $|A| = \prod \lambda_i$, 知 $|A| = 1 \times 2 = 2$.

$$|A - 3A^{-1}| = |EA - 3A^{-1}| = |A^{-1}(A^2 - 3E)| = |A^{-1}| \times |A^2 - 3E|$$

因矩阵 A 的特征值为 $1, 2$, 知 A^2 的特征值为 $1, 4$, 故 $A^2 - 3E$ 的特征值为 $-2, 1$.

所以 $|A - 3A^{-1}| = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$.



线性代数



填空题

行列式

A 组

276 【答案】 -4

【分析】 方法 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \times 2 = -4.$$

方法 2 按第 1 行直接展开

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4.$$

277 【答案】 -48

【分析】 由于行列式每一列元素和均为 6, 首先各行加到第一行上, 再用行列式的性质计算.

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48.$$

【评注】 利用本题的方法可以计算类似的 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$



这个行列式每一列均有一个 a , $(n-1)$ 个 b , 首先将各行加到第一行, 第一行元素均变为 $a+(n-1)b$, 之后用行列式的性质计算.

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\
 &= [a+(n-1)b] (a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

278 【答案】 -120

【分析】 把第一行加到第四行, 提出公因数 10, 再把第四行逐行互换到第一行, 由范德蒙行列式, 得

$$\begin{aligned}
 D &= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} \\
 &= -10(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) \\
 &= -120.
 \end{aligned}$$

279 【答案】 -13

【分析】 由行列式的定义知含 x^2 的有两项, 一项为 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 3x^2$, 符号为正, 另一项为 $a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} = 16x^2$, 符号为负, 故 x^2 项的系数为 -13.

本题也可以通过计算行列式的值求得 x^2 项的系数, 不过计算量较大.

280 【答案】 $(-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3}$

【分析】 由 $|kA| = k^n |A|$, $|AB| = |A| \cdot |B|$, $|A^T| = |A|$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 有

$$\begin{aligned}
 |-A^T B^{-1}| &= (-1)^n |A^T B^{-1}| = (-1)^n |A^T| \cdot |B^{-1}| \\
 &= (-1)^n |A| \cdot \frac{1}{|B|} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$



281

【答案】11

【分析】方法 1 按定义直接计算各元素的代数余子式:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

类似地: $A_{21} = 0, A_{22} = 3, A_{23} = 0, A_{31} = 0, A_{32} = 0, A_{33} = 2$.

$$\text{从而 } \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} = 11.$$

方法 2 对于三阶矩阵 A , 其伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$, 所以 $\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}$ 为 A^* 所有元素之和.

$$\text{由于 } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 于是 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, |A| = 6, \text{ 所以}$$

$$A^* = |A| A^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 6 & 0 \\ 18 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\text{从而 } \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} = 11.$$

【评注】第一种方法比较直接,易于理解,但计算量比较大,相比之下第二种方法考核的知识点略多,但计算量比较少,如果给出的是 4 阶行列式,建议用第二种方法.

282

【答案】1

【分析】由于 $(a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1) = (a_1, a_2, a_3)$, 所以

$$|a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1| = |a_1, a_2, a_3| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

也可以用行列式的性质求解,将第 2 列的 (-1) 倍加到第 1 列,再将第 3 列的 1 倍加到第 1 列得

$$|a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1| = |a_1 - a_3, a_2 + a_3, a_3 + a_1| = |2a_1, a_2 + a_3, a_3 + a_1|.$$

将第 1 列的 $(-\frac{1}{2})$ 倍加到第 3 列,再将第 3 列的 (-1) 倍加到第 2 列得

$$|a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_1| = |2a_1, a_2 + a_3, a_3| = |2a_1, a_2, a_3| = 2|a_1, a_2, a_3| = 1.$$



【评注】 利用矩阵的分块乘法可得到等式

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

这点在试题中常常用到,注意掌握.

矩阵

A 组

283

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & -18 \\ 14 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】

$$A\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & 10 & -6 \\ 7 & 16 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$A\Lambda - \Lambda A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & -18 \\ 14 & 24 & 0 \end{bmatrix}.$$

【评注】 由本题可引申到:

设 $A = [a_{ij}]$ 是 n 阶矩阵, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$, 则 $A\Lambda = [\lambda_j a_{ij}]$, $\Lambda A = [\lambda_i a_{ij}]$.

284

【答案】

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】

$$\text{因为 } A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} [2, 0, 0] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

又因 $\beta^T \alpha = [2, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 2$, 所以

$$A^3 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T \alpha)(\beta^T \alpha)\beta^T = 4\alpha\beta^T = 4A.$$



【评注】 矩阵的运算要正确、熟练. 注意, 若 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T, \beta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则

$$A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

$$\beta^T \alpha = [b_1, b_2, b_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

前者 $\alpha\beta^T$ 是秩为 1 的三阶矩阵, 而 $\beta^T \alpha$ 是一个数.

当秩 $r(A) = 1$ 时, $A^2 = lA$, 其中 $l = \beta^T \alpha = \alpha^T \beta = \sum a_{ii}$, 进而 $A^m = l^{m-1}A$.

285

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & -2^4 \\ 0 & 0 & -2^4 & 2^4 \end{bmatrix}$$

【分析】 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是两行互换的初等矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} = E, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 如 $r(A) = 1$, 则 $A^n = l^{n-1}A, l = \sum a_{ii}$.

286

【答案】 E

【分析】 因为矩阵 P 可逆, 由 $PA = BP$ 得 $A = P^{-1}BP$, 那么

$$A^2 = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = P^{-1}B^2P$$

归纳得

$$A^{100} = P^{-1}B^{100}P = P^{-1}EP = E.$$

【评注】

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}.$$

287

【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【分析】 由初等变换与初等矩阵的关系可得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = B$, 于是

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



288

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} &= 3A^{-1} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

记住初等矩阵逆矩阵的3个公式,以及左乘行变换右乘列变换的法则.

289

【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

【分析】 由 $AX = B + 2X$, 得 $(A - 2E)X = B$.

由于 $A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆, 且 $(A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, 所以

$$X = (A - 2E)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

【评注】 由于矩阵乘法不满足交换律, 所以本题要注意在等式 $(A - 2E)X = B$ 两端左乘 $(A - 2E)^{-1}$, 得 $X = (A - 2E)^{-1}B$, 不能右乘.

290

 【答案】 $a \neq 3$

【分析】 经初等变换矩阵秩不变

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-2 & 4-a \\ 0 & 0 & (a+1)(3-a) & a(a-3) \end{bmatrix}$$

$r(A) = 3 \Leftrightarrow (a+1)(3-a)$ 与 $a(a-3)$ 不全为 0 $\Leftrightarrow a \neq 3$.

B 组

291

 【答案】 $-3^9 A$

【分析】 由 $r(A) = 1$, 有 $A^2 = lA$, 其中 $l = \sum a_{ii}$, 则 $A^n = l^{n-1}A$.

现在 $l = 2 + (-2) + (-3) = -3$, 所以 $A^{10} = -3^9 A$.



292

【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

【分析】 因为 $AA^* = |A|E$, 故 $A = |A|(A^*)^{-1}$, 由已知得 $|A^*| = -8$, 又 $|A^*| = |A|^3$, 得 $|A| = -2$.

$$\text{又 } (A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } A = |A|(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

【评注】 由 A 可求 A^* , 由 A^* 也应会求 A . 本题求 $(A^*)^{-1}$ 时, 既可用初等行变换也可用分块矩阵求逆公式.

293

【答案】

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

【分析】 由 $AA^* = |A|E$, 有

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = |A^{-1}|A$$

因为 $(A^{-1})^{-1} = A$, 求出 A^{-1} 的逆矩阵就是求出矩阵 A .

$$\begin{aligned} (A^{-1} | E) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \\ &= (E | A) \end{aligned}$$

可知 $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. 又因 $|A^{-1}| = 2$, 故



$$(A^*)^{-1} = |A^{-1}| A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

294 【答案】 $-(A+2E)$

【分析】 由于 $A^2 + 3A + 3E = O$, 所以,

$$A^2 + A + 2A + 2E + E = O,$$

$$A(A+E) + 2(A+E) = -E,$$

$$(A+2E)(A+E) = -E,$$

故 $(A+E)^{-1} = -(A+2E)$.

295 【答案】 27

【分析】 由初等矩阵知, $A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$. 于是

$$A^*B = A^*A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } |A^*B| = 3^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 27.$$

296 【答案】 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

【分析】 利用分块矩阵, 有

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

其中 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 可逆. 上式两边右乘 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{那么 } A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【评注】 当 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0$, $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 不可逆时, 你能求出来 A 吗?

297 【答案】

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



【分析】 化简矩阵方程, 矩阵方程两边左乘 A^{-1} 、右乘 A 有

$$2B = BA + 6E$$

于是 $B(2E - A) = 6E$.

$$\begin{aligned} \text{所以 } B &= 6(2E - A)^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【评注】 求二阶矩阵的伴随矩阵有规律: 主对角线对调, 副对角线变号, 即

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

因此二阶矩阵求逆用 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ 是简捷的.

对于分块矩阵, 要会用两个公式

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

另外 $kA = [ka_{ij}]$ 不要出错, 不要与行列式性质混淆.

求矩阵 A 一般有两种思路:

(1) 求逆矩阵和矩阵运算得到矩阵 A ; (2) 解方程组, 用方程组的解构造矩阵 A .

298 【答案】 3 或 4

【分析】 矩阵 A 和 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$. 由

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = -(a+1)(a-3) \\ |B| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (a+1)(4-a) \end{aligned}$$

当 $a = 3$ 时, $r(A) = 2, r(B) = 3$, 当 $a = 4$ 时, $r(A) = 3, r(B) = 2$, 所以 $a = 3$ 或 $a = 4$ 时, 矩阵 A 和 B 不等价.

299 【答案】 2

【分析】 由 $AB + 2A = A(B + 2E)$, 而



$$B + 2E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

是可逆矩阵,故 $r(AB + 2A) = r(A(B + 2E)) = r(A)$.

经初等变换矩阵的秩不变,易见

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $r(AB + 2A) = 2$.

向量

A 组

300 【答案】 5

【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -7 & t-6 \end{vmatrix} = -7(t-5)$$

所以 $t = 5$.

301 【答案】 $(-\infty, +\infty)$

【分析】 由于本题向量的个数与维数不一样,不能用行列式去分析,而要用齐次方程组只有零解,或矩阵的秩来进行分析.

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & t+2 & 5 \\ 0 & -2 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-t \\ 0 & 0 & t+2 \end{bmatrix}$$

由于 $\forall t$, 恒有 $r(A) = 3$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关.

【评注】 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s \Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = 0$ 只有零解.

n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$.

302 【答案】 -1 或 -2

【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} a+1 & a & a-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ a & 2-a & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ a & 2-a & 4-a \end{vmatrix} \\ = -2(a+1)(a+2)$$



本题把每行都加到第1行略简便.

303 【答案】 $a \neq \frac{1}{9}$

【分析】 由于

$$[\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

那么 $\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow$

$$r[\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3] = 3$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 所以

$$r[\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3] = 3$$

$$\Leftrightarrow \text{矩阵} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{可逆} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9a \neq 0.$$

304 【答案】 $a \neq 1$

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可表示任一个三维向量

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (0, 0, 1)^T$ 等价

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$

$\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$

$$\text{由} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = 1 - a \neq 0, \text{所以 } a \neq 1.$$

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可以表示任一个 n 维向量, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可以表示

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \varepsilon_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$$

显然, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 亦可表示 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可互相线性表出, 从而它们有相同的秩. 故

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = n$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

反之, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 是 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关, 从而 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出.

即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可表示任一个 n 维向量.

305 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【分析】 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 说明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+1 & 2a+1 & 2a+1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} \\ = -(2a+1)(a-1)^2 = 0$$

当 $a = 1$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ 不合题意.



所以 $a = -\frac{1}{2}$ 时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 秩为 2.

或者, 经初等变换向量组的秩不变, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{bmatrix}$$

如 $a = 1$, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$.

下设 $a \neq 1$, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{bmatrix}$$

所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.

306 【答案】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$

【分析】 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]$ 作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第一, 二, 五列三阶子式不为 0, 故极大无关组可以是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$.

307 【答案】 $-\frac{1}{3}$

【分析】 $\beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, a\beta + \alpha_3$ 线性相关, 存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1(\beta + \alpha_1) + k_2(\beta + \alpha_2) + k_3(a\beta + \alpha_3) = 0$$

整理有

$$(k_1 + k_2 + k_3 a)\beta + (k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3) = 0$$

因已知 $2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$, 且 β 是任意向量, 使上式成立, 只需取 $k_1 = 2, k_2 = -1, k_3 = 3$, 则

有 $2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$, 且令 β 的系数为 0, 即 $k_1 + k_2 + ak_3 = 2 - 1 + 3a = 0$, 即 $a = -\frac{1}{3}$.

B 组

308 【答案】 -1

【分析】 因为 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + a\alpha_2, 3\alpha_2 + \alpha_3$ 线性相关, 故有不全为 0 的 x_1, x_2, x_3 使

$$x_1(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) + x_2(\alpha_1 + a\alpha_2) + x_3(3\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

即 $(x_1 + x_2)\alpha_1 + (2x_1 + ax_2 + 3x_3)\alpha_2 + (x_1 + x_3)\alpha_3 = 0$.

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故必有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

因为 x_1, x_2, x_3 不全为 0, 所以上述齐次方程组有非零解, 系数行列式必为 0, 于是



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a+1=0$$

从而 $a = -1$.

【评注】 若看清行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的书写规律, 这一类填空题就很容易计算了.

另外 $[\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + a\alpha_2, 3\alpha_2 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 下面如何处理?

309 【答案】 3

【分析】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$, 由题意

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示且表示法不唯一 $\Leftrightarrow$ 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解

$$\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < 3$$

$$\bar{A} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 2a - 3 & a - 3 \end{array} \right]$$

可见 $r(A) = r(\bar{A}) < 3 \Leftrightarrow a = 3$.

310 【答案】 $a \neq 0$

【分析】 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 无解.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & a \\ 2 & 4 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -14 & a-21 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right].$$

311 【答案】 4

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 个 3 维向量, 若其线性无关, 则任一个 3 维向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 现存在 γ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 故必有

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a-4)(a+1) = 0$$

如 $a = -1$,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 故 $a = 4$.

当然也可以



$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & a & 1 & a^2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & 0 & (a+1)(a-4) & 2a(4-a) \end{array} \right]$$

再分析判断.

312 【答案】 3

【分析】 由于 α_1, α_2 线性无关, α_4 不能由 α_1, α_2 线性表示, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关. 由题设 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示, 所以可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性表示, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组, 于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为 3, 从而 $r(A) = 3$.

【评注】 矩阵的秩等于其行向量组的秩, 也等于其列向量组的秩.

线性方程组

A 组

313 【答案】 $(-1, -1, 1, 0)^T, (1, -1, 0, 1)^T$

【分析】 对系数矩阵加减消元, 有

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$n - r(A) = 4 - 2 = 2$$

令 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 得 $x_2 = -1, x_1 = -1$.

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 得 $x_2 = -1, x_1 = 1$.

所以基础解系为 $(-1, -1, 1, 0)^T, (1, -1, 0, 1)^T$.

314 【答案】 -5 或 -6

【分析】 齐次方程组 $Ax = 0$ 有无穷多解的充分必要条件是 $r(A) < n$ (n 是未知量的个数). 现在是三个未知数三个方程的齐次方程组, 故可以用系数行列式 $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & 3 \\ 1 & a+2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & a+5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+5) \begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (a+5)(-a-6) = 0$$

故 $a = -5$ 或 $a = -6$.

【评注】 对 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组作是否有非零解的判定时, 既可以用秩也可以用行列式. 如果方程个数与未知数个数不相等, 那么一定用秩.

315 【答案】 2

【分析】 $r(A^T) = r(A)$, 又齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中, 解向量的个数为 $n - r(A)$. 因 $n - r(A) = 4 - r(A) = 2$ 知 $r(A) = 2$, 故 $r(A^T) = 2$.



316 【答案】 $k_1(1, 2, 0)^T + k_2(-2, 1, 1)^T$, k_1, k_2 是任意实数

【分析】 易见行列式 $|A| = 0$, 秩 $r(A) = 2$. 那么 $r(A^*) = 1$.

从而 $n - r(A^*) = 2$, 齐次方程组 $A^*x = 0$ 通解形式为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2$.

又 $A^*A = |A|E = O$, 所以 A 的列向量是齐次方程组 $A^*x = 0$ 的解.

B 组

317 【答案】 $k(-3, -1, 1, 2)^T + (-2, 1, 4, 2)^T$, 其中 k 是任意常数

【分析】 方程组 (1) $Ax = b$ 有唯一解, 故 $r(A) = r(A|b) = 3$. 显然 $r(B) = r(B|b) = 3$, 且 $\eta_1 = (1, 2, 3, 0)^T$ 是方程组 $B_{3 \times 4}y = b$ 的另一个特解.

B 是 3×4 矩阵, 故对应齐次方程组 $Bx = 0$ 的基础解系只由一个线性无关向量组成, 且是 $\eta - \eta_1$. 故 (2) 的通解为

$$k(\eta - \eta_1) + \eta = k(-3, -1, 1, 2)^T + (-2, 1, 4, 2)^T, \text{ 其中 } k \text{ 是任意常数.}$$

318 【答案】 $(1, 0, 1)^T + k(1, 1, 0)^T$

【分析】 因方程组 $Ax = b$ 有两个不同的解, 有

$$r(A) = r(\bar{A}) < 3$$

又 A 中存在 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$, 知 $r(A) \geq 2$.

故必有 $r(A) = 2$, $n - r(A) = 3 - 2 = 1$, 通解为 $\alpha + k\eta$.

由解的性质 $\alpha_2 - \alpha_1 = (1, 1, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的解.

本题当然也可用解的概念求出 a, b , 再来求解.

319 【答案】 $\begin{bmatrix} 2k & 2l & 2\lambda \\ k & l & \lambda \\ -k & -l & -\lambda \end{bmatrix}$, 其中 k, l, λ 是任意常数

【分析】 将 B 按列分块, 设 $B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 则

$AB = A[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [A\beta_1, A\beta_2, A\beta_3] = O \Leftrightarrow A\beta_1 = 0, A\beta_2 = 0, A\beta_3 = 0$, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解向量.

对齐次线性方程组 $Ax = 0$, 求出其通解, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Ax = 0$ 有通解 $k[2, 1, -1]^T$, 取 $\beta_i, i = 1, 2, 3$ 为 $Ax = 0$ 的通解, 再合并成 B , 得

$$B = \begin{bmatrix} 2k & 2l & 2\lambda \\ k & l & \lambda \\ -k & -l & -\lambda \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k, l, \lambda \text{ 是任意常数.}$$



【评注】 $AB = O$ 时, B 的每一列都是 $Ax = 0$ 的解, 反之将 $Ax = 0$ 的解合并成矩阵 B , 则有 $AB = O$, 题设要求所有满足 $AB = O$ 的 B , 故应取不同的任意常数 k, l, λ , 将 $Ax = 0$ 和 $AB = O$ 联系起来是重要的.

本题若已知 A , 求满足 $BA = O$ 的所有的 B , 该如何求?

特征值和特征向量

A 组

320 【答案】 4

【分析】 基础考题, 由特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 4). \end{aligned}$$

321 【答案】 -5

【分析】 设 α 是矩阵 A^{-1} 属于特征值 λ_0 的特征向量, 按定义有 $A^{-1}\alpha = \lambda_0\alpha$, 于是 $\alpha = \lambda_0 A\alpha$. 即

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} \lambda_0(-a + 2 + 2) = a & (1) \\ \lambda_0(2a + a - 2) = 1 & (2) \\ \lambda_0(2a - 2 - 1) = 1 & (3) \end{cases}$$

由(2)或(3)知 $\lambda_0 \neq 0$, (2)-(3) 易见 $a = -1$, 那么 $\lambda_0 = -\frac{1}{5}$. 因为 A 和 A^{-1} 的同一个特征向量对应的特征值互为倒数, 故 α 是矩阵 A 中 $\lambda = -5$ 所对应的特征向量.

【评注】 若已知 A 的特征向量, 通常可用定义法, 由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 建立方程组来求参数. 本题不要去求 A^{-1} , 而要通过转换.

322 【答案】 $-2, -\frac{1}{2}$

【分析】 由于矩阵 $A + 2E$ 与 $2A + E$ 均不可逆, 所以 $|A + 2E| = 0, |2A + E| = 0$, 于是 $|-2E - A| = 0, |-\frac{1}{2}E - A| = 0$, 从而矩阵 A 的特征值为 $-2, -\frac{1}{2}$.

【评注】 特征值为特征方程 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ 的根, 所以由 $|2A + E| = 0$ 推出 $|-\frac{1}{2}E - A| = 0$, 得到 $-\frac{1}{2}$ 为矩阵 A 的一个特征值.



323 【答案】 $k(1,1,1)^T, k \neq 0$

【分析】 矩阵 A 各行元素之和均为 5, 即

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 5 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 5 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 5 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{即} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

324 【答案】 8

【分析】 由 $A \sim B$ 有 $A + kE \sim B + kE$, 进而 $|A + kE| = |B + kE|$, 故

$$|A + 2E| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8.$$

325 【答案】 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, k_1, k_2$ 不全为 0

【分析】 因 $P^{-1}AP = \Lambda$, 知 Λ 的主对角线元素是 A 的特征值, 故 A 的特征值为 1, 1, -1.

当 $P^{-1}AP = \Lambda$ 时, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的每列是 A 的相应的特征向量, 从而 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, k_1, k_2$ 不全为 0.

326 【答案】 -2

【分析】 因为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$,

所以矩阵 A 的特征值为 2, 3, 3. 因为矩阵 A 的特征值有二重根, 所以

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow \lambda = 3$ 有两个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow (3E - A)x = 0$ 有两个线性无关的解

$\Leftrightarrow r(3E - A) = 1$.

那么 $3E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 可见 $a = -2$.

【评注】 A 是上三角阵, 可直接得出其对角元素即是其特征值.

B 组

327 【答案】 9, -1, -1

【分析】 $A = \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} (1, 0, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$2A$ 的特征值: 10, 0, 0.

从而 $2A - E$ 的特征值: 10 - 1, 0 - 1, 0 - 1.



【评注】 $\alpha^T \alpha = (1, 0, 2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + 0 + 4 = \sum a_n.$

$\alpha^T \alpha$ 是矩阵 $\alpha \alpha^T$ 的非零特征值.

328 【答案】 $k(0, 1, 1)^T, k \neq 0$

【分析】 因为 A 是实对称矩阵, 不同特征值对应的特征向量相互正交, 设 $\lambda = -2$ 的特征向量是 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$, 那么

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_2 = 4 - 2 - 2a = 0 \\ \alpha_3^T \alpha_1 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ \alpha_3^T \alpha_2 = 4x_1 - x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

可先求出 $a = 1$, 再由

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

得到基础解系 $(0, 1, 1)^T$, 所以 $\alpha_3 = (0, k, k)^T, k \neq 0$.

329 【答案】 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(-2\alpha_1 + \alpha_3), k_1, k_2$ 不全为 0

【分析】 由于 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 2 & -4 \\ -1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 1)$

对于 $\lambda = 0$, 由 $(0E - B) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 得基础解系

$$\beta_1 = (1, 1, 0)^T, \beta_2 = (-2, 0, 1)^T.$$

所以矩阵 A 关于 $\lambda = 0$ 的特征向量:

$$P\beta_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 + \alpha_2, P\beta_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\alpha_1 + \alpha_3.$$

【评注】 如 $P^{-1}AP = B, B\alpha = \lambda\alpha$ 有 $P^{-1}AP\alpha = \lambda\alpha$ 即有 $A(P\alpha) = \lambda(P\alpha)$.

330 【答案】 4

【分析】 由 $A \sim B$ 有 $A + kE \sim B + kE$, 进而 $r(A + kE) = r(B + kE)$.

$$\text{于是 } A - E \sim B - E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A + E \sim B + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{从而 } r(A - E) + r(A + E) = r(B - E) + r(B + E) = 2 + 2 = 4.$$

331 【答案】 $-1, -1, 2$

【分析】 由题设得 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1,$



$\alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 可逆, 于是 $P^{-1}AP =$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 即矩阵 A 与 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 相似. 又 $|\lambda E - B| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$, 所以矩阵 A 与

B 的特征值均为 $-1, -1, 2$.

332

【答案】

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

【分析】 因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交.

设 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 是矩阵 A 属于 $\lambda = 6$ 的特征向量, 则

$$\begin{cases} \alpha_3^T \alpha_1 = x_1 - x_3 = 0 \\ \alpha_3^T \alpha_2 = x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = (1, -1, 1)^T$$

由于 $\lambda = 3$ 的特征向量 α_1, α_2 不正交, 故需正交化处理.

$$\text{令 } \beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{再单位化得}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{那么 } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ 为所求.}$$

二次型

A 组

333

【答案】 0 或 5

【分析】 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

二次型的秩为 2, 即矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$.



$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 10a, \text{ 且 } A \text{ 中有二阶子式 } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

所以 $a = 0$ 或 $a = 5$ 时, 二次型的秩为 2.

334 【答案】 $z_1^2 - z_2^2$

【分析】 方法 1 对 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2$ 作可逆线性变换 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$ 二次型化为

$2y_1^2 - 2y_2^2$, 从而其规范形为 $z_1^2 - z_2^2$.

方法 2 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2$ 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1),$$

故矩阵 A 的特征值为 $1, 0, -1$, 即正惯性指数为 1, 负惯性指数为 1, 从而规范形为 $z_1^2 - z_2^2$.

【评注】 如果仅仅求二次型的规范形, 只需求出正负惯性指数. 有两种方法确定二次型的正负惯性指数, 方法 1, 配方法求出二次型的标准形, 正(负)平方项的个数 = 正(负)惯性指数. 方法 2, 求出二次型矩阵的特征值, 正(负)特征值的个数 = 正(负)惯性指数.

335 【答案】 $a > \frac{5}{2}$

【分析】 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, 因为 f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于零, 即

$$\Delta_1 = a > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4a - 9 > 0,$$

$$\Delta_3 = |A| = 4a^2 - 10a > 0,$$

故 f 正定 $\Leftrightarrow a > \frac{5}{2}$.

【评注】 二次型 $x^T Ax$ 正定 $\Leftrightarrow \forall x \neq 0$, 恒有 $x^T Ax > 0 \Leftrightarrow A$ 的特征值全大于 0 $\Leftrightarrow$ 二次型的正惯性指数 $p = n \Leftrightarrow A$ 与 E 合同, 即有可逆矩阵 C 使 $A = C^T C \Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于 0.

二次型 $x^T Ax$ 正定的必要条件: $a_{ii} > 0$ 与 $|A| > 0$.



选 择 题

行列式

A 组

336 【答案】 B**【分析】** 行列式是不同行不同列元素乘积的代数和,其一般项是

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

本题中作为 x^4 项,必须每行元素都要有 x 项出现,因而只能是 $a_{14} a_{23} a_{32} a_{41} = x^4$,又

$$\tau(4321) = 3 + 2 + 1 = 6$$

于是 x^4 的系数为 $+1$.对于 x^3 项,必须有 1 行(列)不出现 x 项,因而只能是

$$a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} = x^3$$

此时 $\tau(1324) = 1$,从而 x^3 的系数为 -1 .

$$\text{或 } f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x-1 \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 1 & x & 2 & 2 \\ x & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

再分析逆序 $a_{14} a_{23} a_{32} a_{41} = x^3(x-1)$.

对于逆序不熟悉的同学,也可考虑通过计算行列式来处理.

337 【答案】 B**【分析】** 方法 1 用行列式的性质与展开定理计算,由于第二行的元素为 $1, 1, 0, 0$,我们将第一列的 (-1) 倍加到第二列,将 a_{22} 位置的元素变为零,之后按第二行展开,变为计算三阶行列式,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$

方法 2 这是一个爪形行列式,用主对角线上的元素将第一列除 a_{11} 位置以外的元素消为零.为此将第二列的 (-1) 倍加到第一列,将第三列的 (-1) 倍加到第一列,再将第四列的 (-1) 倍加到第一列,得

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$



【评注】 方法2可以用来计算一般的爪形行列式,例如 $D =$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ b & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, a_i \neq$$

$0 (i=1, 2, \cdots, n)$. 我们将第 i 列的 $-\frac{b}{a_i}$ 加到第一列 ($i=2, \cdots, n$), 将其化为上三角形行列式,

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ b & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b^2}{a_i} & b & \cdots & b \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \left(a_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b^2}{a_i} \right) a_2 \cdots a_n.$$

338 【答案】 D

【分析】 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

本题也可以直接计算代数余子式, 计算量较大.

【评注】 由于行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 与行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 只有第一行元素不同, 从而

这两个行列式第一行元素的代数余子式相同.

339 【答案】 D

【分析】 $|B| = (-1)^{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3} 4! = 24$

$$|C| = 4(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 24$$

$$|D| = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -24.$$

B 组

340 【答案】 D

【分析】 由于 $3A - B = (3\alpha_1, 3\alpha_2, 3\beta_1) - (\alpha_1, \alpha_2, \beta_2) = (2\alpha_1, 2\alpha_2, 3\beta_1 - \beta_2)$, 所以

$$|3A - B| = |2\alpha_1, 2\alpha_2, 3\beta_1 - \beta_2| = 4|\alpha_1, \alpha_2, 3\beta_1 - \beta_2|$$


$$= 4(|\alpha_1, \alpha_2, 3\beta_1| + |\alpha_1, \alpha_2, -\beta_2|) = 4(3a - b).$$

【评注】

注意 $|A+B| \neq |A|+|B|$.

341

【答案】 B

【分析】

因 $(A-E)^{-1} = A^2 + A + E$. 有

$$(A-E)(A^2 + A + E) = E, \text{ 即 } A^3 = 2E$$

那么 $|A|^3 = |A^3| = |2E| = 2^3|E| = 2^3|A| = 2$.

342

【答案】 C

【分析】

由于 A 是 3 阶可逆矩阵, 所以 $A^* = |A|A^{-1} = 2A^{-1}$, 于是

$$|A^{-1} + A^*| = |A^{-1} + 2A^{-1}| = |3A^{-1}| = 3^3|A^{-1}| = \frac{27}{2}.$$

343

【答案】 C

【分析】

$$\text{因 } (\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \text{ 故 } \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6|A| = 12$$

或者, 用行列式性质

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_2| = 3|\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2| \\ &= 3|\alpha_3, 2\alpha_1, \alpha_2| = 6|\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2| \\ &= 6|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 6|A| = 12. \end{aligned}$$

344

【答案】 C

【分析】

本题考查行列式的性质, 分别对每个行列式作适当的列变换, 向 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 靠拢.

$$\begin{aligned} (A) \quad & |\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1| = |0, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1| = 0. \\ (B) \quad & |\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| = |2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= 2|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= 2|\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| \\ (C) \quad & |\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2| = |\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2| = |\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1| = |A|. \\ (D) \quad & |\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2| = |\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2| = |\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2| = -|A|. \end{aligned}$$

请说出每个等号成立的理由, 作的什么变换, 用的什么性质.

$$\text{或对 (C) 如上题有 } (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \text{ 则 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$|C| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |A| \cdot 1 = |A|$$



故应选(C).

345 【答案】 D

【分析】 若 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, 则由行列式的性质得

$$|A+B| = \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

故选项(A)不正确.

由于 $|A|B|$ 中 $|A|$ 是数, 所以 $|A|B| = |A|^n|B|$, 故选项(B)不正确.

由于 $A^*A = |A|E$, 所以 $|A^*A| = ||A|E| = |A|^n|E| = |A|^n$, 于是 $|A^*||A| = |A|^n$, 当矩阵 A 可逆时, $|A^*| = |A|^{n-1}$, 故选项(C)不正确.

由行列式的性质知, 行列式转置后其值不变, 所以 $|A^T| = |A|$, 选项(D)正确.

【评注】 当矩阵 A 可逆时, 我们有 $|A^*| = |A|^{n-1}$. 若矩阵 A 不可逆, 则 $|A| = 0$, 此时

$$|A^*| = 0, \text{ 因为 } r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$$

346 【答案】 B

【分析】 由 $|kA| = k^n|A|$, $|A^*| = |A|^{n-1}$, 知

$$\left| \frac{1}{3}A^* \right| = \left(\frac{1}{3} \right)^3 |A^*| = \frac{1}{27}(|A|)^2 = \frac{4}{27}.$$

矩阵

A 组

347 【答案】 B

【分析】 设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)^T$,

$$\alpha^T \beta = (a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\beta^T \alpha = (b_1, b_2, b_3) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

所以(B)正确.

注意: $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta\alpha^T$ 都是 n 阶矩阵, $A^T = B$, 故(A)不一定正确. (C)中一个是矩阵, 一个是数不可能相等. (D)中其实是 $k\alpha^T$ 与 $k\beta^T$ (其中 $k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$), 也不一定相同.

348 【答案】 C

【分析】 利用行列式代数余子式的定理有 $AA^* = A^*A = |A|E$,



按矩阵乘法定义,有

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

因为矩阵乘法有结合律: $A^m A^t = A^{m+t} = A^t \cdot A^m$. 又

$$(A+E)(A-E) = A^2 - E = (A-E)(A+E)$$

请你举例说明 AA^T 与 $A^T A$, AA_1 与 $A_1 A$ 可以不相等.

349 【答案】 D

【分析】 矩阵的乘法不满足交换律, A, B 可逆不能保证 $AB = BA$, 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

有 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 而 $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 可知(A)(C) 均不正确.

A, B 可逆时, $A+B$ 不一定可逆, 即使 $A+B$ 可逆, 其逆一般也不等于 $A^{-1} + B^{-1}$. 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 有 } (A+B)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

而 $A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, 所以(B) 不正确.

因为 A 可逆时, $A^* = |A| A^{-1}$, 故

$$(AB)^* = |AB| (AB)^{-1} = |A| |B| B^{-1} A^{-1} = (|B| B^{-1}) (|A| A^{-1}) = B^* A^*,$$

即(D) 正确.

【评注】 因为矩阵乘法不满足交换律, 所以中学代数的乘法公式不能用, 但 $(A+E)^n$ 可用乘法公式展开.

350 【答案】 D

【分析】 由 $r(A^T A) = r(A)$, 因 $A^T A = O$, 有 $r(A) = r(A^T A) = 0$, 故必有 $A = O$. 即(D) 正确.

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 有 $A^2 = E$, 但 $A \neq E$ 且 $A \neq -E$, 即(A) 错误.

若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $A^2 = O$, 但 $A \neq O$, 即(B) 错误.

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $A^2 = A$ 且 $A \neq O$, 但 $A \neq E$, 即(C) 错误.

351 【答案】 D

【分析】 如果 A, B 均是 n 阶矩阵, 命题(1) 当然正确, 而现在的问题是题中没有 n 阶矩阵这一条件, 故(1) 不正确. 例如



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

显然 A 不可逆. 类似地, 对于 $AB = E$, 虽然 $|AB| = 1$, 但能否用行列式乘法公式呢? 应检查 A, B 是否均为 n 阶矩阵, 有的考生不注意公式成立时的条件, 随意用公式是不妥的.

A, B 是 n 阶矩阵, $(AB)^2 = E$, 即 $(AB)(AB) = E$, 可知 A, B 均可逆.

于是 $ABA = B^{-1}$, 从而 $BABA = E$. 即 $(BA)^2 = E$. 即(2) 正确.

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 虽然 A, B 都不可逆,

但 $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 可逆, 可知(3) 不正确.

由于 A, B 均为 n 阶不可逆矩阵, 知 $|A| = |B| = 0$, 那么由行列式乘法公式知

$$|AB| = |A||B| = 0,$$

故 AB 必不可逆. (4) 正确.

【评注】 若 A, B, C 是 n 阶矩阵, 且 $ABC = E$, 则

$$|A| \cdot |B| \cdot |C| = 1 \Rightarrow A, B, C \text{ 均可逆.}$$

$$\text{那么 } ABC = E \xrightarrow{\text{左乘 } A^{-1}} BC = A^{-1} \xrightarrow{\text{右乘 } A} BCA = E$$

$$ABC = E \xrightarrow{\text{右乘 } C^{-1}} AB = C^{-1} \xrightarrow{\text{左乘 } C} CAB = E$$

要会这种“旋转”变形法.

352 【答案】 D

【分析】 (A)(B)(C) 是基本公式. 关于(D)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^2 &= \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & O \\ O & BA \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^3 &= \begin{bmatrix} AB & O \\ O & BA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & ABA \\ BAB & O \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^4 &= \begin{bmatrix} AB & O \\ O & BA \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} (AB)^2 & O \\ O & (BA)^2 \end{bmatrix} \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

353 【答案】 C

【分析】 $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A + A^T$

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

又 $AA^* = |A| E$, 所以 ①③④⑤ 均是对称矩阵.

而 $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = -(A - A^T)$ 是反对称矩阵.

354 【答案】 C

【分析】 (A) 中零行(第二行)不在矩阵的最下面.



(B) 中主元所在的列(第四列) 其余元素不全为 0.

(D) 中非零行的第 1 个非零元(第二行) 不是 1.

355 【答案】 D

【分析】 单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵是初等矩阵, 而(A)(B)(C) 均需要单位矩阵作两次初等变换才能得到.

356 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } P_2 A P_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意(A) 是 $P_1 A P_2$, (B) 是 $P_2 P_1 A$, (D) 是 $A P_2 P_1$.

357 【答案】 A

【分析】 按已知条件, 有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = B, B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E, \text{ 即 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E, \\ \text{故 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

358 【答案】 A

【分析】 $A_{3 \times 3} \cong B_{3 \times 3} \Rightarrow r(A) = r(B)$

$$\text{其中 } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r(B) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & a+3 \end{bmatrix}, r(A) = 2 \Rightarrow a = -3.$$

故 $A \cong B \Rightarrow a = -3$.

故选(A).

359 【答案】 D

【分析】 注意对矩阵秩概念的理解. 当 $r(A) = r$ 时:

A 中一定有 r 阶子式不为 0, 但并不要求所有的 r 阶子式都不为 0.

A 中 $r-1$ 阶子式一定有不为 0 的, 也不要求所有的 $r-1$ 阶子式全不为 0.



而 $r+1$ 阶子式则必须全为 0.

360 【答案】 D

【分析】 (A) 中三阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 且没有四阶子式, 其秩必为 3.

(B) 中 $\forall a$, 由于 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = a+1$, 至少有 1 个三阶子式不为 0, 其秩

必为 3.

类似地(C) 中 a 和 $a+1$ 不可能同时为 0, 必有三阶子式不为 0, 而四阶子式一定为 0, 故其秩必为 3.

当 $a+1=0$ 时, 可见(D) 的秩为 2.

361 【答案】 C

【分析】 因 A, B 均为四阶非零矩阵, 那么 $1 \leq r(A) \leq 4, 1 \leq r(B) \leq 4$.

又 $AB = O$, 有 $r(A) + r(B) \leq 4$.

所以 $r(A) = 3$ 时, 必有 $r(B) = 1$, 即(C) 正确.

当 $r(A) = 4$ 时, 只有 $r(B) = 0$, (D) 一定不可能.

当 $r(A) = 1$ 时, $r(B)$ 可能为 1, 可能为 2, 也可能为 3. 即(A) 不一定必成立.

例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, B 可以是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

同理(B) 也不是必然的.

【评注】 本题考查矩阵秩的概念以及 $AB = O$ 中关于秩的信息.

若 $AB = O$, 将 B 按列分块, $B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$, 有

$$AB = A[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_n] = [0, 0, \dots, 0]$$

从而 $A\beta_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 即 β_i 是方程组 $Ax = 0$ 的解. 这样向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可由 $Ax = 0$ 的基础解系线性表出, 从而 $r([\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]) \leq n - r(A)$. 故有 $r(A) + r(B) \leq n$. 以上得到的命题“若 $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$ ”在考试中可直接使用. 由这一命题及 $r(A) > 0, r(B) > 0$, 立刻可得出 A 与 B 的秩均小于 n .

362 【答案】 A

【分析】 因 $B \neq O$, 必有 $r(B) \geq 1$.

又因 $A^* \neq O$, 即存在 $A_{ij} \neq 0$, 于是 A 中有 2 阶子式非零, 知 $r(A) \geq 2$.



由 $AB = O$, 有 $r(A) + r(B) \leq 3$, 故必有 $r(A) = 2, r(B) = 1$.

363 【答案】 D

【分析】 A 是四阶矩阵, 那么由伴随矩阵秩的公式

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$$

可见 $r(A^*) = 1 \Leftrightarrow r(A) = 3$.

对矩阵 A 作初等变换, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 6-2a \end{bmatrix}$$

$$\text{若 } a = 3, \text{ 则 } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 3 \\ & & 2 & -1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ 秩 } r(A) = 3.$$

$$\text{若 } a = 2, \text{ 则 } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 2 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \text{ 秩 } r(A) = 4.$$

$$\text{若 } a = 1, \text{ 则 } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ 秩 } r(A) = 3.$$

所以, $a = 1$ 或 $a = 3$ 时均有 $r(A^*) = 1$, 应选(D).

B 组

364 【答案】 D

【分析】 由 $AB = A + B$ 有 $(A - E)B = A$. 若 A 可逆, 则

$$|A - E| \cdot |B| = |A| \neq 0$$

知 $|B| \neq 0$. 即矩阵 B 可逆, 从而命题(1) 正确.

类似于(1) 由 B 可逆 $\Rightarrow A$ 可逆, 从而 AB 可逆, 那么 $A + B = AB$ 可逆, 知命题(2) 正确.

因为 $AB = A + B$, A, B 地位等同, 由(1) 知, 命题(3) 也正确.

关于(4), 用分组因式分解有:

$$AB - A - B + E = E \quad \text{即 } (A - E)(B - E) = E$$

所以 $A - E$ 恒可逆, 命题(4) 正确, 故应选(D).



365 【答案】 B

【分析】 按 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ 本题只要计算出 A_{31}, A_{22}, A_{13} 中两个代数余子式的值即可.

因 $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{vmatrix} = -ab$ 可排除(A)(C).

再由 $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & a \\ c & 0 \end{vmatrix} = -ac$ 可知选(B).

或者作为选择题增强条件,假设 A 是可逆的.有

$$A^* = |A| A^{-1} = -abc \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

亦知选(B).

366 【答案】 B

【分析】 由 $|A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3$, 知 $|A| = \frac{1}{3}$, 于是

$$A^* = |A| A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } A_{11} + A_{12} + A_{13} = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

367 【答案】 C

【分析】 $XA + 2E = X + B$ 有 $X(A - E) = B - 2E$, 于是

$$\begin{aligned} X &= (B - 2E)(A - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如果你选的是(A),检查一下是哪里出错了,注意矩阵乘法!如果你选的是(B)或(D),又是哪里的问题?

368 【答案】 B

【分析】 矩阵 A 作两次行变换可得到矩阵 B , 而 AP_3P_2, AP_1P_3 描述的是矩阵 A 作列变换, 故应排除.

把矩阵 A 第一行的 2 倍加至第三行后, 再一、二两行互换可得到 B .

或者把矩阵 A 的一、二两行互换后, 再把第二行的 2 倍加至第三行亦可得到 B , 而 P_2P_3A 正



是后者. 所以应选(B).

【评注】 本题考查行变换是左乘初等矩阵, 列变换是右乘初等矩阵. 希望能看清楚

$$P_1 P_3 A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + 2a_{21} & a_{32} + 2a_{22} & a_{33} + 2a_{23} \end{bmatrix},$$

$$AP_3 P_2 = AP_1 P_3 = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} + 2a_{13} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} + 2a_{23} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} + 2a_{33} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$AP_3 P_1 = AP_2 P_3 = \begin{bmatrix} a_{12} + 2a_{13} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} + 2a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} + 2a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

369 【答案】 B

【分析】 由已知条件, 有

$$\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} A = B$$

$$\text{那么 } B^{-1} = \left[\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} A \right]^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

所以 A^{-1} 的第一列乘以 $-\frac{1}{2}$ 得矩阵 B^{-1} . 故应选(B).

370 【答案】 C

【分析】 由于 $\begin{bmatrix} E & O \\ C & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & O \\ -C & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$, 所以 $P^{-1} = \begin{bmatrix} E & O \\ -C & E \end{bmatrix}$. 又

$$P^{-1}A = \begin{bmatrix} E & O \\ -C & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -CA_1 + A_3 & -CA_2 + A_4 \end{bmatrix},$$

故正确选项为(C).

371 【答案】 C

【分析】 由于 $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$, 所以向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩 ≤ 2 , 于是 $r(A) \leq 2$. 另一方面, 由题设 $A^* \neq O$, 所以矩阵 A 中有 2 阶非零子式, 故 $r(A) \geq 2$. 综上, $r(A) = 2$.

372 【答案】 D

【分析】 由 $2AB = A$ 得 $A(2B - E) = O$. 于是

$$r(A) + r(2B - E) \leq 4$$



又因 A 是 5×4 矩阵且 A 的列向量线性无关, 有 $r(A) = 4$, 从而 $r(2B - E) = 0$ 即 $2B - E = O$.

于是 $B = \frac{1}{2}E$, $r(B) = 4$, 故 $r(B^*) = 4$.

向量

A 组

373 【答案】 C

【分析】 由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则存在不全为零的 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0,$$

不妨设 $k_i \neq 0$, 则有 $\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i} \alpha_1 - \dots - \frac{k_{i-1}}{k_i} \alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} \alpha_{i+1} - \dots - \frac{k_s}{k_i} \alpha_s$, 故选项(C) 正确.

选项(A)(B)(D) 为充分条件, 不是必要条件.

374 【答案】 C

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(t+2)(t-1)^2 = 0$$

故 $t = 1$ 或 -2 .

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 无关 $\Leftrightarrow |\beta_1, \beta_2, \beta_3| \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & t+2 \\ 2 & t+4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & t+2 \\ 2 & t & 3 \end{vmatrix} = -(t+3)(t-1) \neq 0$$

$t \neq -3$ 且 $t \neq 1$.

375 【答案】 A

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)x = 0$ 有非零解

$$\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$$

故(A) 正确, (C)(D) 均为充分条件, 不是必要的.

376 【答案】 D

【分析】 必要性(反证法) 如果 $\alpha_i = k_1 \alpha_1 + \dots + k_{i-1} \alpha_{i-1} + k_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + k_s \alpha_s$, 则

$$k_1 \alpha_1 + \dots + k_{i-1} \alpha_{i-1} - \alpha_i + k_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + k_s \alpha_s = 0.$$

因为 $k_1, \dots, k_{i-1}, -1, k_{i+1}, \dots, k_s$ 不全为 0. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关. 矛盾.

充分性(反证法) 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则有不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使 $k_1 \alpha_1 +$

$k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0$, 不妨设 $k_s \neq 0$, 则有 $\alpha_s = -\frac{1}{k_s}(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{s-1} \alpha_{s-1})$. 矛盾.

注意(A)(B) 都是必要条件, 不是充分条件. 例如 $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$.



而(C)是充分条件.

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,

但由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 $\nRightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关.

377 【答案】 D

【分析】 若 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T$, 则 α_1, α_2 线性无关.

当 $\alpha_3 = (1, 1, 0)^T$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关; 当 $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

可知当(I)线性无关时,(II)既可能线性无关亦可能线性相关, 所以(A)(B)均错误. (C)是(A)的逆否命题, 当然是错误的.

【评注】 要区分向量个数的增减与向量分量的增减, 两者不要混淆.

378 【答案】 D

【分析】 用观察法

$$(A) (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$$

$$(B) (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_1) = 0$$

$$(C) (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$$

知(A)(B)(C)均线性相关, 故应选(D).

或者

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{由} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{故}$$

$$r(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4$$

故(D)必线性无关.

379 【答案】 A

【分析】 因 $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$,

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_3 + \alpha_1) = 0,$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = 0,$$

知(B)(C)(D)都线性相关.

$$\text{或者} \quad (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

由于 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵, 那么



$$r(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$$

亦知(A)正确.

380 【答案】 C

【分析】

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = (k_1, 0, 5k_2)^T$$

若 β 是 α_1, α_2 的线性组合,则 β 的第2个元素必须是0,第1个、第3个元素是独立的,故选(C).

381 【答案】 D

【分析】

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,知 α_1, α_2 必线性无关,又因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关,故 α_4 必可由 α_1, α_2 线性表示.因此 α_4 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.故应选(D).

如 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T, \alpha_4 = (0, 0, 0)^T$,

可知(A)(B)(C)均不正确.

382 【答案】 B

【分析】 因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出,有

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$,于是 $s \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$.

又 $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq s$,从而 $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = s$,即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关.

但当 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出且 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关时并不要求 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 一定是线性无关的.

例如 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 0)^T$ 和 $\beta_1 = (1, 0, 0)^T, \beta_2 = (0, 1, 0)^T$.

可见这是充分但不必要的条件.

383 【答案】 D

【分析】 按向量组秩的定义

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 的极大线性无关组有 } r \text{ 个向量}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 中存在 } r \text{ 个向量线性无关而任意 } r+1 \text{ 个必线性相关,}$$

故应选(D).

例如向量组 $(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$ 的秩为3,包含零向量的两个或三个向量组成的向量组线性相关,(A)(B)都不正确.

又如向量组 $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0)$ 的秩为3,任何两个向量都线性无关,(C)不正确.

384 【答案】 C

【分析】 列向量作行变换,有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 7 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 9 & 2 \\ -1 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & -7 & -14 & -14 & -7 \\ 0 & -13 & -26 & -26 & -13 \\ 0 & 6 & 12 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$



$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3$.

因为三阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是极大线性无关组, 故选(C).

【评注】 多数情况下向量组的极大线性无关组是不唯一的. 例如, 本题中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 与 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 及 $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ 和 $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ 等. 通常对列向量作初等行变换在将矩阵化成阶梯形矩阵之后, 选每行第一个非 0 的数所在的列(本题是一、二、四列)为极大线性无关组较简便. 可略去行列式不为 0 的思考.

B 组

385

【答案】 D

【分析】 向量组 ① 是四个三维向量, 从而线性相关, 可排除(B).

由于 $(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)$ 线性无关, 添上两个分量就可得向量组 ②, 故向量组 ② 线性无关. 所以应排除(C). 向量组 ③ 中前两个向量之差与最后一个向量对应分量成比例, 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关, 那么添加 α_3 后, 向量组 ③ 必线性相关. 应排除(A), 由排除法, 应选(D).

【评注】 关于向量组 ④ 亦可直接计算行列式, 由

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 14 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

而知其线性相关.

386

【答案】 C

【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

$$\text{由 } |\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{一、二两行成比例}).$$

注意 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = -c_1$, $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4| = c_1$, $|\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = -c_3 - c_4$.

387

【答案】 B

【分析】 由于(A)(C)两个命题互为逆否命题, 一个命题与它的逆否命题要正确就全正确, 要错误就全错误. 按本题的要求仅有一个命题是正确的, 所以(A)(C)均谬误. 其实亦可考查下面的例子:



$\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 0)$ 与 $\beta_1 = (1, 0, 0, 0), \beta_2 = (0, 1, 0, 0), \beta_3 = (0, 0, 0, 1)$.

显然 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2, r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$. 即当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时, 其延伸组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可线性无关. 所以(A)(C) 错误.

如果 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 有不全为 0 的 x_1, x_2, x_3 使 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 那么齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

必有非零解, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关. 所以(D) 错误.

【评注】 要会用定理: 若(I) 无关, 则(II) 无关, 即若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则其延伸组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 必线性无关.

388 【答案】 B

【分析】 (III) 线性相关 $\Leftrightarrow |AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ 或 $|B| = 0$.

可见应选(B).

【评注】 本题选项中, 若(A) 或(C) 或(D) 成立, 则(B) 成立. 因是四选一的选择题, 只能有一个选项正确. 故(A)(C)(D) 均可排除, 应选(B).

389 【答案】 A

【分析】 β_1, β_2 可由 α_1, α_2 线性表示 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \beta_1, y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 = \beta_2$ 都有解.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -2 & b \\ 3 & -1 & a & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & b-14 \\ 0 & 5 & a-12 & -17 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & b-14 \\ 0 & 0 & a-2 & -b-3 \end{array} \right]$$

所以 $a = 2, b = -3$.

390 【答案】 B

【分析】 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关, 从而部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ 线性无关, 故应选(B).

取 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1, 0)^T, \beta_2 = (0, 0, 0, 1)^T, \beta_1 = \alpha_1$, 知(A) 与(C) 选项错误.

关于选项(D), 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2$ 线性相关, 则 $\beta_1 + \beta_2$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 从而 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 与假设矛盾, 从而(D) 错误.



【评注】 若仅 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出是不能推导出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关的, 请考查 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 0)^T, \alpha_3 = (3, 0, 0)^T, \beta = (0, 1, 0)^T$.

391 【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ a & 1 & 1 & a+6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3a+6 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 3a+6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当 $a = 1$ 时, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$,

而当 $a = -2$ 时亦有秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$,

所以 $a = 1$ 是秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ 的充分而非必要条件.

392 【答案】 C

【分析】 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价, 则这两个向量组的秩相同, 于是矩阵 A 与 B 的秩相同, 故矩阵 A 与矩阵 B 等价, 选项(A)的命题正确.

若 $r(A) = r(B) = 3$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩均为 3, 于是三维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 三维向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也线性无关, 故向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以相互线性表示, 即这两个向量组等价, 选项(B)的命题正确.

$$\begin{aligned} \text{若 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 满足 } r(A) = r(B) = 2, \text{ 但矩阵 } A \text{ 的列向量组 } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 与矩阵 } B \text{ 的列向量组 } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 不等价, 选项(C)的命题不正确.} \end{aligned}$$

若 $r(A, B) = r(B)$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩相同, 从而向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的极大线性无关组也是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的极大线性无关组, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示. 显然 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 故两个向量组等价, 选项(D)的命题正确.

【评注】 两个 $m \times n$ 矩阵 A, B 等价的充分必要条件是 $r(A) = r(B)$. 等价的向量组有相同的秩, 但秩相同的向量组不一定等价.

线性方程组

A 组

393 【答案】 C

【分析】 因 $r(A) = 3, n - r(A) = 5 - 3 = 2$, 知未知数有 2 个自由变量. 去掉第三和第五



列的三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 故 x_3, x_5 不能是自由变量.

而 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, 说明 x_2, x_5 或 x_1, x_5 或 x_2, x_3 都可

以为自由变量.

394 【答案】 B

【分析】 由于 $A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b$, 那么

$$A(3\alpha_1 - 2\alpha_2) = 3A\alpha_1 - 2A\alpha_2 = 3b - 2b = b,$$

$$A\left[\frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)\right] = \frac{1}{3}A\alpha_1 + \frac{2}{3}A\alpha_2 = \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}b = b,$$

$$A\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right] = \frac{1}{2}A\alpha_1 + \frac{1}{2}A\alpha_2 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b,$$

可知 $3\alpha_1 - 2\alpha_2, \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 均是 $Ax = b$ 的解.

而 $A(\alpha_1 - \alpha_2) = A\alpha_1 - A\alpha_2 = b - b = 0$, 所以 $\alpha_1 - \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 的解, 不是 $Ax = b$ 的解, 故应选(B).

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $Ax = b$ 的解, $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 1$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax = b$ 的解. 知道这一点, $3\alpha_1 - 2\alpha_2, \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 是 $Ax = b$ 的解也就一目了然了.

395 【答案】 A

【分析】 由 $A\alpha_i = b (i = 1, 2, 3)$ 有

$$A(\alpha_1 - \alpha_2) = A\alpha_1 - A\alpha_2 = b - b = 0,$$

$$A(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = A\alpha_1 + A\alpha_2 - 2A\alpha_3 = b + b - 2b = 0,$$

$$A\left[\frac{2}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)\right] = \frac{2}{3}A\alpha_2 - \frac{2}{3}A\alpha_1 = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}b = 0,$$

$$A(\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3) = A\alpha_1 - 3A\alpha_2 + 2A\alpha_3 = b - 3b + 2b = 0,$$

所以, $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, \frac{2}{3}(\alpha_2 - \alpha_1), \alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3$ 均是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 若 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 0$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是导出组 $Ax = 0$ 的解. 知道这一关系式立即可看出本题应当选(A).

396 【答案】 C

【分析】 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$. 现

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & a-1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5(a-1)$$



所以 $a = 1$.

397 【答案】 C

【分析】 齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系有 3 层含义: (1) 齐次方程组的解; (2) 线性无关; (3) 解向量个数为 $n - r(A)$.

观察 4 个选项, 本题(B) 中两个向量线性相关, 肯定不是基础解系, 要排除. 易见本题秩 $r(A) = 2$, 那么 $n - r(A) = 4 - 2 = 2$, 即解向量个数应为 2, 故要排除(D). 至于(A) 和(C) 必有一个正确, 因此 $(-2, 2, 1, 0)^T$ 肯定是解. 那么 $(1, 2, 0, 1)^T$ 与 $(2, 2, -3, -4)^T$ 中必有一个不是解, 故要从解的角度来分析判断. 将(A) 中的 $(1, 2, 0, 1)^T$ 代入方程, 知不是方程组的解, 故去除(A) (或将(C) 的 $(2, 2, -3, -4)^T$ 代入方程, 满足方程), 所以要选(C).

398 【答案】 D

【分析】 由已知条件知 $Ax = 0$ 的基础解系是由 $Ax = 0$ 的 3 个线性无关的解向量所构成, 现 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 都是 $Ax = 0$ 的解, 且

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆, 知 $r(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 即 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2,$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关. 那么 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 是 $Ax = 0$ 的 3 个线性无关的解向量. 从而也是 $Ax = 0$ 的基础解系, 故应选(D).

(A) 中等价向量组的向量个数不一定是 3. 例如 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 就是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的等价向量组.

(B) 中的解向量 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关.

(C) 等秩的向量组不一定是 $Ax = 0$ 的解.

B 组

399 【答案】 B

【分析】 如果(A) 是 $Ax = 0$ 的解, 则(D) 必是 $Ax = 0$ 的解. 因此(A)(D) 均不是 $Ax = 0$ 的解.

由于 α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 那么 α_1, α_2 可表示 $Ax = 0$ 的任何一个解 η , 亦即方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \eta$ 必有解. 因为

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

可见第 2 个方程组无解, 即 $(2, 2, -5)^T$ 不能由 α_1, α_2 线性表示, 故(C) 不成立, 应选(B).

【评注】 本题知道正确的选项必在(B) 和(C) 中, 其实只要解其中的一个方程组就可以了, 是没有必要像现在这样解两个方程组的, 但如果有的题目确实需要解两个系数矩阵一样的方程组时, 用本题的方法是简捷可取的.



400 【答案】 C

【分析】 由于 A 是 $m \times n$ 矩阵, 知 A^T 是 $n \times m$ 矩阵, 那么 $A^T x = 0$ 是 n 个方程 m 个未知数的齐次线性方程组, 从而 $m - r(A^T) = t$.

又因 $r(A) = r(A^T)$, 所以 $r(A) = m - t$, 即应当选(C).

【评注】 要搞清楚齐次方程组基础解系中解向量的个数与系数矩阵秩之间的关系. 对于用矩阵形式给出的方程组要分清方程的个数以及未知数的个数(即若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $Ax = 0$ 是 m 个方程 n 个未知数的方程组), 本题还涉及 $r(A) = r(A^T)$ 这一关系式.

401 【答案】 B

【分析】 因为 α_1, α_2 线性无关, 所以 $Ax = 0$ 至少有两个线性无关的解, 故

$$n - r(A) \geq 2, \quad \text{即 } r(A) \leq 3 - 2 = 1$$

因此排除(A)(C).

对于(B)和(D), 因为 α_2 不是方程组(D)的解, 因此排除(D).

【评注】 先利用秩来排除, 再利用解的概念来选择比较方便. 如果每个都直接代入验算是不是解会比较麻烦.

402 【答案】 A

【分析】 $A^T A$ 是 n 阶矩阵

$$r(A^T A) = r(A) \leq \min(m, n)$$

若 $m < n$, 则 $r(A^T A) \leq m < n$, 因此 $A^T A x = 0$ 必有非零解.

即 $m < n$ 是 $A^T A x = 0$ 有非零解的充分条件.

但不是必要条件. 因为当 $m = n$ 时, 若 A 不可逆, $A^T A x = 0$ 仍有非零解.

403 【答案】 D

【分析】 因 η_1, η_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 有 $n - r(A) = 2$.

又 A 是四阶矩阵, 故 $r(A) = 2$.

于是(A)(C)均不正确.

$$\text{由 } A\eta_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 0, \text{ 有 } \alpha_2 = 2\alpha_4, \text{ 排除(B), 故应选(D).}$$

直接地, 由 $A\eta_1 = 0, A\eta_2 = 0$ 得

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

如 α_3, α_4 线性相关, 不妨设 $\alpha_3 = k\alpha_4$, 则 $\alpha_1 = (3 - 3k)\alpha_4, \alpha_2 = 2\alpha_4, \alpha_3 = k\alpha_4$, 与 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ 相矛盾.



特征值和特征向量

A 组

404 【答案】 D【分析】 由特征值的性质: $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$.

现在

$$\sum a_{ii} = 1 + (-3) + 1 = -1$$

故可排除(C).

显然, 矩阵 A 中第 2、第 3 两列成比例, 易知行列式 $|A| = 0$, 故 $\lambda = 0$ 必是 A 的特征值, 因此可排除(B).

对于(A) 和(D) 的选择, 我们可以用特殊值法, 由于

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

说明 $\lambda = 1$ 不是矩阵 A 的特征值, 故可排除(A).【评注】 这一类题目最直接方法是计算 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ -4 & \lambda + 3 & -3 \\ -2 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ -4 & \lambda & -3 \\ -2 & \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \dots$$

另一个方法是验算、代入 λ 值, 看哪个选项中 λ 满足 $|\lambda E - A| = 0$.但是应当会用: $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$, $\prod \lambda_i = |A|$, 及特殊值法来排除. 也许会更方便.**405** 【答案】 A【分析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha$, $\alpha \neq 0$ 可得到:

$$A^2\alpha = \lambda^2\alpha, \quad A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha, \quad (A - E)\alpha = (\lambda - 1)\alpha$$

说明 A^2 , A^{-1} , $A - E$ 与 A 的特征值是不一样的(但 A 的特征向量也是它们的特征向量). 由排除法应选(A).或由于 $|\lambda E - A^T| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A|$, A 与 A^T 有相同的特征多项式, 所以 A 与 A^T 有相同的特征值.**406** 【答案】 C【分析】 若非零向量 α 为矩阵 A 的特征向量, λ 为对应的特征值, 则有 $A\alpha = \lambda\alpha$, 即向量 $A\alpha$ 与 α 线性相关.

$$\text{由于 } A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以向量}$$

 $(2, 0, 1)^T$ 与 $(2, 1, 0)^T$ 均为矩阵 A 属于特征值 1 的特征向量.

由于 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, 向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 线性无关, 所以 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 不是矩阵

A 的特征向量.

由于 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以向量 $(1, 0, 1)^T$ 为矩阵 A 属于特征

值 -1 的特征向量.

综上, 正确选项为(C).

407 【答案】 D

【分析】 若 α 是 $2A$ 的特征向量, 即 $(2A)\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$.

那么 $A\alpha = \frac{\lambda}{2}\alpha$, 所以 α 是矩阵 A 属于特征值 $\frac{\lambda}{2}$ 的特征向量, 即(D) 正确.

由于方程组 $(\lambda E - A^T)x = 0, (\lambda E - A^*)x = 0, (\lambda E - A^2)x = 0$ 与 $(\lambda E - A)x = 0$ 不一定同解, 所以 α 不一定是 A 的特征向量.

如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征向量是 $(1, 0, 0)^T$, 而 $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$A^2 = A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 有 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 均不是 A 的特征向量.

408 【答案】 B

【分析】 (A) 有 3 个不同的特征值必和对角矩阵相似. (D) 是对称矩阵必和对角矩阵相似. (B)(C) 特征值都是 $1, 1, -1$, 特征值 $\lambda = 1$ 是 2 重根.

对于选项(B), 记为矩阵 B

$E - B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 有 $r(E - B) = 2, n - r(E - B) = 3 - 2 = 1$

即齐次方程组 $(E - B)x = 0$ 只有 1 个线性无关的解, 亦 $\lambda = 1$ 只有 1 个线性无关的特征向量, 所以 B 不能对角化.

而对于选项(C), 记为 C

$E - C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $r(E - C) = 1, n - r(E - C) = 2$

故 $\lambda = 1$ 有 2 个线性无关的特征向量, 可以相似对角化.

409 【答案】 C

【分析】 由相似的性质: $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$ 及 $|A| = |B|$, 有

$$\begin{cases} 3 + a + 3 = 3 + 4 + (-1) \\ 3(3a - 2b) = -12 \end{cases}$$



可解出 $b = 2$.

故选(C).

410 【答案】 B

【分析】 相似的必要条件:

$$|A| = |B|, \lambda_A = \lambda_B, r(A) = r(B), \sum a_{ii} = \sum b_{ii}$$

(A) 中, $r(A) \neq r(B)$. (C) 中 $\sum a_{ii} \neq \sum b_{ii}$, 所以排除(A)(C).

(B) 中, 矩阵 A, B 的特征值都是 1, 2, 有两个不同的特征值, 那么

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}, B \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}, \text{故 } A \sim B.$$

(D) 中, 矩阵 A, B 的特征值都是 3, 3, 二重根.

$$\text{而 } 3E - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, r(3E - B) = 1, n - r(3E - B) = 2 - 1 = 1.$$

即 $\lambda = 3$ 只有 1 个线性无关的特征向量, 所以 B 不能对角化, 故 A 和 B 不相似.

411 【答案】 D

【分析】 由题设 α_i 是方程组 $Ax = (i-1)\alpha_i$ 的解, $i = 1, 2, 3$, 于是

$$A\alpha_1 = (1-1)\alpha_1 = 0\alpha_1, A\alpha_2 = (2-1)\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = (3-1)\alpha_3 = 2\alpha_3,$$

所以矩阵 A 的特征值为 0, 1, 2, 故矩阵 $A^2 + E$ 的特征值为 1, 2, 5, 于是 $A^2 + E$ 的迹为 8, 正确选项为(D).

【评注】 矩阵 A 的迹为其主对角线上的所有元素和, 也为其所有特征值的和, 即 $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. 若 λ 为矩阵 A 的特征值, 则 $\varphi(\lambda)$ 为矩阵 $\varphi(A)$ 的特征值.

412 【答案】 A

【分析】 由于矩阵 A 可逆, 有

$$A^{-1}(AB)A = BA$$

按相似定义知 $AB \sim BA$. 即命题 ① 正确.

因为 $A \sim B$, 故存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$, 那么

$$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$$

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = [(P^{-1})^T]^{-1} A^T (P^{-1})^T$$

按相似定义知命题 ②③④ 也均正确. 故应选(A).

【评注】 要会用定义法来分析问题.



B 组

413 【答案】 B

【分析】 由于 k 重特征值最多有 k 个线性无关的特征向量, 那么当 $r(A_{3 \times 3}) = 1$ 时, $(0E - A)x = 0$ 必有两个线性无关的解, 故 $\lambda = 0$ 的重数 ≥ 2 , 即 $\lambda = 0$ 至少是二重特征值. 当然也可能

是三重. 例 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r(A) = 1$, 但 $\lambda = 0$ 是三重特征值.

故应选(B).

414 【答案】 A

【分析】 设 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量, 按定义有

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

对应分量相等, 即有

$$\begin{cases} 3 - 4 - 3 = \lambda \\ a + 4 + 6 = -2\lambda \\ 3 - 2b - 3 = 3\lambda \end{cases}$$

可见 $\lambda = -4$, $a = -2$, $b = 6$, 所以应选(A).

【评注】 利用特征值、特征向量的定义建立方程组, 然后求出参数的值. 这种方法是基本的, 也是重要的.

415 【答案】 A

【分析】 方法1 由 $A\alpha_2 = 3\alpha_2$, 有 $A(-\alpha_2) = 3(-\alpha_2)$, 即当 α_2 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量时, $-\alpha_2$ 仍是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量. 同理 $2\alpha_3$ 仍是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量.

当 $P^{-1}AP = \Lambda$ 时, P 由 A 的特征向量所构成, Λ 由 A 的特征值所构成, 且 P 与 Λ 的位置是对应一致的. 现在, 矩阵 A 的特征值是 $1, 3, -2$, 故对角矩阵 Λ 应当由 $1, 3, -2$ 构成, 因此排除(B)(C). 由于 $2\alpha_3$ 是属于 $\lambda = -2$ 的特征向量, 所以 -2 在对角矩阵 Λ 中应当是第二列, 故应选(A).

方法2 由题设条件知, 若取 $Q = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 则有

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{现取 } P = [\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记}} QC$$

$$\text{则 } P^{-1}AP = (QC)^{-1}AQC = C^{-1}(Q^{-1}AQ)C$$

$$= C^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix} C,$$



$$\text{其中 } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{得 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

故应选(A).

【评注】 当 $P^{-1}AP = B$ 时, P 中列向量不是矩阵 A 的特征向量. 当 $P^{-1}AP = \Lambda$ 时, P 中列向量是矩阵 A 的特征向量, Λ 中的主对角线元素是矩阵 A 的特征值, 且 P 与 Λ 中特征向量与特征值位置要对应正确.

416 【答案】 D

【分析】 由 α_2, α_3 是 A 不同特征值的特征向量, 于是 $\alpha_2 + \alpha_3$ 不是 A 的特征向量. 所以不能是(D).

如 α_1, α_2 是 A 关于 λ 的特征向量, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \neq 0$ 仍是 A 关于 λ 的特征向量. 故 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_1, 5\alpha_1$ 仍是 A 关于 $\lambda = 2$ 的特征向量. 又因 α_1, α_2 线性无关, 保证 $\alpha_2, -\alpha_1$ 线性无关, $\alpha_1 + \alpha_2, 5\alpha_1$ 线性无关, $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$ 亦线性无关, 即(A)(B)(C) 均可逆.

二次型

A 组

417 【答案】 A

【分析】 二次型的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$, 由于二次型的秩为 2, 所以 $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2,$$

于是 $a = -2$ 或 $a = 1$.

$$\text{当 } a = -2 \text{ 时, } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \text{其二阶子式 } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, |A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

0, 此时 $r(A) = 2$.

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{此时 } r(A) = 1, \text{不符合题意, 舍去.}$$

综上, $a = -2$. 选(A).



418 【答案】 B【分析】 二次型 f 的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ 1 & b & -2 \end{bmatrix},$$

由题设,二次型 f 在正交变换下的标准形为 $y_1^2 - 3y_2^2$, 所以矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 0.$$

由于 $\text{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, 又

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ 1 & b & -2 \end{vmatrix} = -2b - ab^2 + 2,$$

所以

$$\begin{cases} a - 2 = 1 - 3 \\ -2b - ab^2 + 2 = 0 \end{cases},$$

解得 $a = 0, b = 1$.【评注】 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 经过正交变换化为标准形时, 标准形的系数为二次型矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值.**419** 【答案】 A

【分析】 方法1 用特征值

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

二次型经正交变换标准形是 $y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$, 故规范形是 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

方法2 用配方法

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 - (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + 2x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_3^2 \end{aligned}$$

亦知 $p = 2, q = 1$, 规范形为 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.**420** 【答案】 A

【分析】 由于

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3 \\ &= 2x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 3x_2x_3 \\ &= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2, \end{aligned}$$



所以规范形为 $z_1^2 + z_2^2$, 正确的选项为(A).

【评注】 本题常见错误的做法是作线性变换 $\begin{cases} z_1 = x_1 + x_2, \\ z_2 = x_2 + x_3, \\ z_3 = x_3 - x_1, \end{cases}$ 二次型化为规范形 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$. 注意由于矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 不可逆, 所以变换 $\begin{cases} z_1 = x_1 + x_2, \\ z_2 = x_2 + x_3, \\ z_3 = x_3 - x_1 \end{cases}$ 不是可逆线性变换.

421 【答案】 B

【分析】 由 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

知 A 的特征值是 $3, -1, 0$, 从而 $p = 1, q = 1$.

B 组

422 【答案】 C

【分析】 利用特征值

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & 1 & -a \\ 1 & \lambda - 2a + 1 & 1 \\ -a & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 1 & \lambda - 2a + 1 & 1 \\ -a & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 2a + 1 & 2 \\ -a & 1 & \lambda - 2a \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2a + 2)(\lambda - 2a - 1) \end{aligned}$$

A 的特征值: $0, 2a - 2, 2a + 1$,

$$p = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 1 > 0 \\ 2a - 2 \leq 0 \end{cases}.$$

423 【答案】 D

【分析】 二次型经正交变换得标准形为 $y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$.

说明二次型矩阵 A 的特征值是: $1, 3, -1$.

分别求每个矩阵的特征值

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

可知应选(D).

424 【答案】 C

【分析】 二次型正定的必要条件是: $a_{ii} > 0$.



在(D)选项中,由于 $a_{33} = 0$,易知 $f(0,0,1) = 0$ 与 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ 相矛盾.
二次型正定的充分必要条件是顺序主子式全大于零.在(A)中,二阶主子式

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

在(B)选项中,三阶主子式 $\Delta_3 = |\mathbf{A}| = -1$.

因此选项(A)(B)(D)中的矩阵均不是正定矩阵.故应选(C).

对(C)选项,因 $D_1 = 2 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$,

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 10 > 0$$

故选项(C)中的矩阵是正定矩阵.

【评注】 利用正定的必要条件,先排除不正定的矩阵是方便的.关于(C),用顺序主子式判别最简捷.当然,利用特征值或配方化标准形来看正惯性指数是否为 n 也是可以的.

425 【答案】 B

【分析】 由

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)$$

知矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $1, 1, -1$.

$\mathbf{A} + k\mathbf{E}$ 的特征值为: $k+1, k+1, k-1$.

$$\begin{cases} k+1 > 0 \\ k-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow k > 1.$$



扫描二维码,获取更多免费资料



概率论与数理统计水平自测一答案

本自测题极容易,你应当快速完成测试,毫无压力。

如果你解答这些题还有困难,请自行补课,推荐《考研数学复习全书·基础篇·概率论与数理统计基础》。

1. 【答案】 A

【分析】 第二次取得新球,有两种情况.

第一种情况是第一次取得旧球,第二次取得新球,概率为 $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$.

第二种情况是第一次取得新球,第二次取得新球,概率为 $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$.

故第二次取到新球的概率为 $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$.

2. 【答案】 A

【分析】 因为 $B \subset A$, 故 $AB = B$, 而 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(B)$.

3. 【答案】 B

【分析】 由概率密度的性质可知 $\int_0^1 (c + x) dx = cx + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + c = 1$, 故 $c = \frac{1}{2}$.

4. 【答案】 B

【分析】 $E(2 - X^2) = E(2) - E(X^2) = 2 - E(X^2) = -4$, $E(X^2) = 6$.

又因为 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, 设泊松分布的参数为 λ , 则 $E(X) = D(X) = \lambda$, 故

$$\lambda = 6 - \lambda^2, \lambda = 2, \lambda = -3 (\text{舍去})$$

故 X 服从泊松分布 $P(2)$. $P\{X < 1\} = P\{X = 0\} = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = e^{-2}$.

5. 【答案】 A

【分析】 因为随机变量 X, Y 都服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布, 因此有 $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$.

故 $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

6. 【答案】 D

【分析】 随机变量 X 服从参数为 0.5 的指数分布, 其方差 $D(X) = 4$, 期望 $E(X) = 2$.

切比雪夫不等式为 $P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$, 代入可得

$$P\{|X - 2| \geq 3\} \leq \frac{4}{9}.$$

7. 【答案】 0.9



【分析】 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{0.5} = 0.8$, 故 $P(AB) = 0.4$.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.8 - 0.4 = 0.9.$$

8. 【答案】 4

【分析】 因为随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 故 $D(X) = 1$.

$$D(Y) = D(2X + 10) = 4D(X) = 4.$$

9. 【答案】 $\frac{2}{9}, \frac{1}{9}$

【分析】 设 $P\{X=1\} = a_1, P\{X=2\} = a_2, P\{Y=1\} = b_1, P\{Y=2\} = b_2, P\{Y=3\} = b_3$.

$$P\{X=1, Y=1\} + P\{X=1, Y=2\} + P\{X=1, Y=3\} = a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{3}$$

$$P\{X=1, Y=1\} + P\{X=2, Y=1\} = b_1 = \frac{1}{2},$$

$$P\{X=1, Y=2\} = a_1 b_2 = \frac{1}{3} b_2 = \frac{1}{9}, b_2 = \frac{1}{3}, \text{故 } b_3 = \frac{1}{6}.$$

$$\alpha = P\{X=2, Y=2\} = P\{X=2\}P\{Y=2\} = a_2 b_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

$$\beta = P\{X=2, Y=3\} = P\{X=2\}P\{Y=3\} = a_2 b_3 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}.$$

10. 【答案】 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \int_0^{+\infty} x d(-e^{-\frac{x}{\theta}}) \\ &= x(-e^{-\frac{x}{\theta}}) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} d\left(\frac{x}{\theta}\right) = -\theta e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} = \theta \end{aligned}$$

$$\text{故 } \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

概率论与数理统计水平自测二答案

本自测 10 个小题都是基本的概念与计算, 难度不大。同学你应当在规定时间内完成解答, 并且不感到有什么困难。
如果确实有困难, 请自行补课, 推荐《考研数学复习全书·基础篇·概率论与数理统计基础》。

1. 【答案】 B

【分析】 这是一个古典型概率 $P\{X=4\} = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{事件 } A: "x=4" \text{ 中样本点数}}{\Omega \text{ 中样本点总数}}.$

方法 1 取球有先后次序, 取了两个总共有可能 $n = 4 \cdot 3$.

$x = 4$, 取一个为 4 号, 另一个为 1, 2, 3 中一个, 共有可能 $1 \cdot 3$, 再考虑先后, 应有总的可能 $n_A = 2 \cdot 1 \cdot 3$,

$$\text{故 } P\{X=4\} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{1}{2} = 0.5.$$



方法2 不考虑取球次序,取了两个球总共有可能 $n = C_4^2$,取上4号,1种可能,再在1,2,3中另取一个,总的可能 $1 \cdot C_3^1$,故 $P\{X=4\} = \frac{1 \cdot C_3^1}{C_4^2} = \frac{1}{2} = 0.5$.

方法3 只考虑4号球:一种是被取出,另一种是不被取出.

由于取出两只球,余下也是两只球,因而4号球被取出与不取出等可能.

$$P\{X=4\} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

2. 【答案】 C

【分析】 设随机事件 $A = \left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$, 则

$$P(A) = P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx = x^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Y 表示对 X 的三次独立重复观察中 A 出现的次数, 所以 $Y \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right)$.

因此 $P\{Y=2\} = C_3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}$. 答案应选(C).

3. 【答案】 C

【分析】 方法1 分布函数必满足 $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

(A) $F_1(+\infty) + F_2(+\infty) = 2$. (B) $F_1(+\infty) - F_2(+\infty) = 0$. (D) $\frac{F_1(-\infty)}{F_2(-\infty)}$ 结果不确定.

答案选(C).

方法2 记 $X = \max(X_1, X_2)$, 则 X 的分布函数

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \leq x\} = P\{\max(X_1, X_2) \leq x\} = P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\} P\{X_2 \leq x\} = F_1(x) \cdot F_2(x) \end{aligned}$$

所以(C) 是 $X = \max(X_1, X_2)$ 的分布函数.

4. 【答案】 D

【分析】 当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 记 $N(0, 1)$ 的分布为 $\Phi(x)$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } P\{|X-\mu| \leq \sigma\} &= P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \leq 1\right\} = P\left\{-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right\} \\ &= P\left\{-1 < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right\} \\ &= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right\} - P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq -1\right\} \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1. \end{aligned}$$

因 $P\{|X-\mu| \leq \sigma\}$ 为常数 $2\Phi(1) - 1$. 答案选(D).

5. 【答案】 D

【分析】 $D(X) = 4, D(Y) = 4, X, Y$ 独立, 所以 $2X$ 与 $3Y$ 也独立,

$$D(2X - 3Y) = D(2X) + D(3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 4 = 52.$$

6. 【答案】 B



【分析】 (1) $(X_1 - X_2) \sim N(0, 2\sigma^2)$, 故 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$.

(2) $\frac{X_3^2 + X_4^2}{\sigma^2} = \left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2$, $\frac{X_3}{\sigma}$ 与 $\frac{X_4}{\sigma}$ 均服从 $N(0, 1)$, 且相互独立, 所以 $\frac{X_3^2 + X_4^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$.

(3) $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\frac{X_3^2 + X_4^2}{\sigma^2}$ 相互独立, 故 $\frac{(X_1 - X_2)/\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\frac{X_3^2 + X_4^2}{\sigma^2}/2}} = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}} \sim t(2)$.

答案选(B).

7. 【答案】 $\frac{1}{64}$

【分析】 每掷骰子一次得不是偶数点的概率应为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, 或若更简单理解, 投一次骰子就两个等可能结果——奇数、偶数, 概率均为 $\frac{1}{2}$, 投各次所得的奇偶性是相互独立的.

方法1 设 A ——前4次没有出现偶数, B ——前10次没出现偶数.

$$\text{显然 } A \supset B. P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}.$$

方法2 前4次没出现偶数点这事件, 对后6次没出现偶数点的概率没影响, 所以前4次没出现偶数条件下, 前10次均没出现偶数的概率等价于前4次没出现偶数条件下, 后6次没出现偶数的概率, 就等于后6次没出现偶数的概率: $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$.

8. 【答案】 $\frac{4}{27}$

【分析】 $P\{X \leq 2\} = P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \theta + \theta(1 - \theta) = \frac{5}{9}$.

即 $\theta^2 - 2\theta + \frac{5}{9} = \left(\theta - \frac{5}{3}\right)\left(\theta - \frac{1}{3}\right) = 0$, $\theta = \frac{5}{3} > 1$ 不可能, 取 $\theta = \frac{1}{3}$.

$$P\{X = 3\} = \theta(1 - \theta)^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

9. 【答案】 $\mu\sigma^2 + \mu^3$

【分析】 $(X, Y) \sim N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$. 即有 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 X 与 Y 相互独立, $EX = EY = \mu$, $DX = DY = \sigma^2$,

$$E(XY^2) = EX \cdot EY^2 = \mu[DY + (EY)^2] = \mu(\sigma^2 + \mu^2) = \mu\sigma^2 + \mu^3.$$

10. 【答案】 10

【分析】 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则 $E(S^2) = DX = 1$.

$$E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = E[(n-1)S^2] = (n-1) \cdot 1 = n-1 = \frac{9n}{10}, 10n-10 = 9n, n = 10.$$



概率论与数理统计



填空题

随机事件与概率

A 组

426 【答案】 $(1-a)(1-b)$

【分析】 所求的概率为 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$, 已知“事件 C 发生必导致 A, B 同时发生”, 显然是用于化简 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 的. 事实上已知 $C \subset AB$, 故 $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B} \subset \bar{C}$, 所以, $\bar{A}\bar{B}\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$, 又 A 与 B 独立, 故所求的概率为 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1-a)(1-b)$.

427 【答案】 0.9

【分析】 由题设 $P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = 0.3$, 又 $A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 互斥, 所以

$$P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(AB) = 0.3,$$

又 $P(A) + P(B) = 0.5$, 于是 $P(AB) = 0.1$, 那么所求的概率为

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.1 = 0.9.$$

428 【答案】 0.3

【分析】 $P(A\bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB)$,
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4 + 0.3 - P(AB) = 0.6$,
 所以 $P(AB) = 0.1$.
 总之, $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.4 - 0.1 = 0.3$.

429 【答案】 $\frac{8}{15}$

【分析】 记 $A =$ “经过两次交换, 甲袋中白球数不变”, $B =$ “从甲袋中取出的放入乙袋的球为白球”, $C =$ “从乙袋中取出放入甲袋的球为白球”, 则 $A = BC \cup \bar{B}\bar{C}$.

那么, $P(A) = P(BC) + P(\bar{B}\bar{C}) = P(B)P(C|B) + P(\bar{B})P(\bar{C}|\bar{B})$

$$= \frac{3}{9} \times \frac{6}{10} + \frac{6}{9} \times \frac{5}{10} = \frac{8}{15}.$$

【评注】 (1) 如果题目有“随机试验”, 我们首先要分析该试验所对应的概型: 是古典概型, 还是几何概型、独立试验序列概型. 在此基础上应用相应公式、概率性质及其他有关公式计算所求的概率.

(2) 如果要计算某个结果——事件 A 的概率, 而当 A 的发生总是与某些前提条件或原因相联系, 这时我们总是将 A 对其前提条件作全集分解, 应用全概率公式计算 $P(A)$.



430 【答案】 $\frac{5}{8}$

【分析】 掷硬币是独立重复试验,记 X 为将硬币掷 5 次中出现正面向上的次数,而出现反面向上的次数 $Y = 5 - X$, 且 $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$.

记正、反面都至少出现 2 次为事件 A , 则 $A = \{X = 2\} \cup \{X = 3\}$, 所以

$$P(A) = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{8}.$$

431 【答案】 0.2

【分析】 A, B 独立, 则 $A, \bar{B}$ 相互独立, $\bar{A}, B$ 也相互独立.

$$0.3 = P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = P(A)[1 - P(B)] = 0.6 \cdot P(A),$$

所以 $P(A) = 0.5$.

$$P(B - A) = P(B\bar{A}) = P(B)P(\bar{A}) = 0.4 \cdot [1 - P(A)] = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2.$$

B 组

432 【答案】 $\frac{1}{4}$

$$\text{【分析】 } P(\bar{A} \cup \bar{B} | C) = 1 - P(AB | C) = 1 - \frac{P(ABC)}{P(C)}$$

$$= 1 - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

433 【答案】 $\frac{15}{16}$

【分析】 可以把射击看成独立重复试验, 设每次射击命中率为 p , 则不中率为 $1 - p$. 记 $A =$ “射击四次至少命中一次”, $B =$ “射击四次至少没命中一次”.

则 $\bar{A} =$ “射击四次一次都没命中”, 显然 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$.

独立射击四次都没命中, $P(\bar{A}) = (1 - p)^4$, 即 $(1 - p)^4 = \frac{1}{16}$, 解得 $p = 1 - p = \frac{1}{2}$.

现求 $P(B)$, $P(B) = 1 - P(\bar{B})$, $P(\bar{B})$ 为四次都命中的概率.

$$P(\bar{B}) = p^4 = \frac{1}{16}, \text{ 故 } P(B) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

【评注】 从 $P(A) = \frac{15}{16}$ 求得 $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, 即中与不中的概率一样, 按对称性可以马上得出 $P(B) = P(A) = \frac{15}{16}$.



434 【答案】 $\left(\frac{4}{7}\right)^{k-1} \frac{3}{7}$

【分析】 若记 A_i = “第 i 次取出 4 个球为 2 白 2 黑”，由于是有放回取球，因而 A_i 相互独立，根据超几何分布知 $P(A_i) = \frac{C_3^2 C_5^2}{C_8^4} = \frac{3}{7}$ ，所以

$$P\{X = k\} = P(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{k-1} A_k) = \left(1 - \frac{3}{7}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{7} (k = 1, 2, \cdots).$$

435 【答案】 $\frac{11}{24}$

【分析】 $X = 2$ ，则由两个合格品，一个不合格品组成，有三种情况。

第一个为次品： $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ ，第二个为次品： $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$ ，第三个为次品： $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$ 。

$$P\{X = 2\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}.$$

436 【答案】 $\frac{1}{4}$

【分析】 本题为古典概型，用概率公式 $P(A) = \frac{m}{n}$ 。

n 计算：恰好取 3 次停止，每次有 2 种不同颜色，又有放回的，所以总的情况 $n = 2^3 = 8$ 。

m 计算：第 3 次取得颜色一定不同于前 2 种颜色，这样第 3 次颜色有 2 种可能，而前 2 次必同色且与第 3 次不同色，共有 2 种可能。

所求概率为 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 。

随机变量及其分布

A 组

437 【答案】 $\frac{1}{2} \ln 2$

【分析】 应用独立试验序列概型，可求得结果。

事实上已知 $X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 记 $A = \{X > 2\}$ ， Y 为对 X 作三次独立重复观

察事件 A 发生的次数，则 $Y \sim B(3, p)$ ，其中 $p = P\{X > 2\} = \int_2^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-2\lambda}$ 。

依题意 $P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1 - p)^3 = \frac{7}{8}$ ，故 $1 - p = \frac{1}{2}$ ， $p = \frac{1}{2}$ ，又

$p = e^{-2\lambda}$ ，由 $\frac{1}{2} = e^{-2\lambda}$ 解得 $\lambda = \frac{1}{2} \ln 2$ 。

438 【答案】 $e^{-1} - e^{-2}$

【分析】 $P\{3 > X > 2 \mid X > 1\} = P\{X > 2 \mid X > 1\} - P\{X \geq 3 \mid X > 1\}$
 $= P\{X > 1\} - P\{X > 3 \mid X > 1\} = e^{-1} - P\{X > 2\} = e^{-1} - e^{-2}.$



【评注】 本题求解直接应用了指数分布两个常用的公式:

当 $X \sim E(\lambda)$ 时, ① $P\{X > t\} = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}, t > 0;$

② $P\{X > t+s | X > s\} = \frac{P\{X > t+s, X > s\}}{P\{X > s\}} = \frac{P\{X > t+s\}}{P\{X > s\}} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P\{X > t\}, t, s > 0.$

439 【答案】 $\frac{19}{27}$

【分析】 $P\{X_1 \geq 1\} = 1 - P\{X_1 < 1\} = 1 - P\{X_1 = 0\} = 1 - (1-p)^2 = \frac{5}{9}$

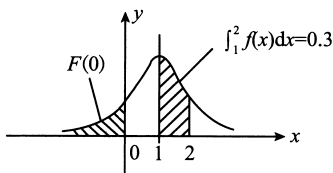
解得 $(1-p)^2 = \frac{4}{9}, 1-p = \frac{2}{3}.$

$P\{X_2 \geq 1\} = 1 - P\{X_2 < 1\} = 1 - P\{X_2 = 0\} = 1 - (1-p)^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}.$

440 【答案】 0.2

【分析】 $f(1+x) = f(1-x)$, 即密度函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处对称.

方法 1



$F(0) = P\{X \leq 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \frac{1}{2} - 0.3 = 0.2.$

方法 2 $F(0) = P\{X \leq 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = 1 - \int_0^{+\infty} f(x) dx$

$$= 1 - \int_0^1 f(x) dx - \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

$$= 1 - \int_0^1 f(1-t) d(1-t) - \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

$$= 1 - \int_0^1 f(1-t) dt - \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

$$= 1 - \int_0^1 f(1+t) dt - \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

$$= 1 - \int_1^2 f(x) dx - \int_1^{+\infty} f(x) dx = 1 - 0.3 - 0.5 = 0.2.$$

441 【答案】 $\begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

【分析】 先求出在 $(0, 4)$ 上 Y 的分布函数 $F_Y(y)$. 当 $0 < y < 4$ 时,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \frac{\sqrt{y}}{2}$$



$$\text{故 } f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}.$$

442 【答案】 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } F_Y\left(\frac{1}{2}\right) &= P\left\{Y \leq \frac{1}{2}\right\} = P\left\{1 - e^{-X} \leq \frac{1}{2}\right\} \\ &= P\left\{e^{-X} \geq \frac{1}{2}\right\} = P\{e^X \leq 2\} \\ &= P\{X \leq \ln 2\} = \int_{-\infty}^{\ln 2} f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【评注】 $P\{X \leq \ln 2\} = 1 - P\{X > \ln 2\} = 1 - e^{-1 \cdot \ln 2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

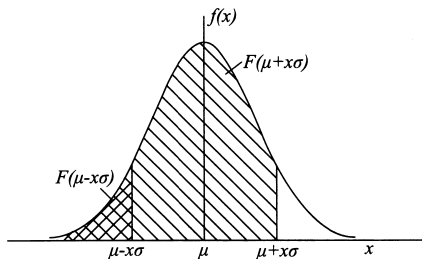
B 组

443 【答案】 1

【分析】 方法 1

$$\begin{aligned} &F(\mu + x\sigma) + F(\mu - x\sigma) \\ &= P\{X \leq \mu + x\sigma\} + P\{X \leq \mu - x\sigma\} \\ &= P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq x\right\} + P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq -x\right\} \\ &= \Phi(x) + \Phi(-x) \\ &= \Phi(x) + [1 - \Phi(x)] = 1. \end{aligned}$$

方法 2 由正态分布密度函数的对称性,如图显示,
 $F(\mu + x\sigma) + F(\mu - x\sigma) = 1.$



444 【答案】 -1

【分析】 由题设 X 与 Y 独立得 $X - Y \sim N(-\mu, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, 即随机变量 $X - Y$ 的密度的对称轴 $x = -\mu$.

现 $P\{X - Y \geq 1\} = \frac{1}{2}$, 即对称轴在 $x = 1$ 处, $-\mu = 1$, 就有 $\mu = -1$.

445 【答案】 $1 - e^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 方法 1 } P\{X \leq 2 \mid X \geq 1\} &= \frac{P\{X \geq 1, X \leq 2\}}{P\{X \geq 1\}} = \frac{P\{1 \leq X \leq 2\}}{\int_1^{+\infty} e^{-x} dx} \\ &= \frac{\int_1^2 e^{-x} dx}{\int_1^{+\infty} e^{-x} dx} = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{e^{-1}} = 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{方法 2 } P\{X \leq 2 | X \geq 1\} &= 1 - P\{X > 2 | X \geq 1\} = 1 - P\{X \geq 2 | X \geq 1\} \\ &= 1 - P\{X \geq 1\} = 1 - e^{-1}.\end{aligned}$$

【评注】 当随机变量 X 服从指数分布 $E(\lambda)$ 时,必具有性质:无记忆性,即

$$P\{X \geq s+t | X \geq t\} = P\{X \geq s\}, \text{ 其中 } s, t \geq 0.$$

方法 2 就用了该性质.

$$\text{该性质证明: } P\{X \geq t\} = \int_t^{+\infty} f(x)dx = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

$$P\{X \geq s+t | X \geq t\} = \frac{P\{X \geq s+t\}}{P\{X \geq t\}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P\{X \geq s\}, s, t \geq 0.$$

446 【答案】 $\frac{17}{18}$

【分析】 由 $P\{X = k\} = \frac{1}{3}$ 知 $\sum_{k=1}^3 P\{X = k\} = 1$, 根据全概率公式得

$$\begin{aligned}P\{Y \leq 2.5\} &= \sum_{k=1}^3 P\{Y \leq 2.5, X = k\} \\ &= \sum_{k=1}^3 P\{X = k\} P\{Y \leq 2.5 | X = k\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + 1 + \frac{2.5}{3} \right) = \frac{8.5}{9} = \frac{17}{18}.\end{aligned}$$

多维随机变量及其分布

A 组

447 【答案】 e^{-2}

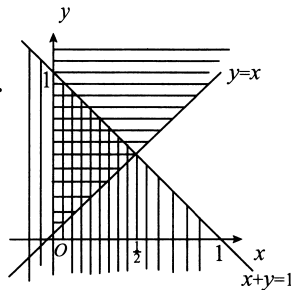
【分析】 $P\{\min(X, Y) \geq 1\} = P\{X \geq 1, Y \geq 1\} = P\{X \geq 1\}P\{Y \geq 1\}$
 $= e^{-1} \cdot e^{-1} = e^{-2}.$

448 【答案】 $1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}$

【分析】 应用公式 $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$ 即可求得结果.

事实上,

$$\begin{aligned}P\{X+Y \leq 1\} &= \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} e^{-y} dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{-x} - e^{x-1}) dx \\ &= 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$



【评注】 在应用公式 $P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y) dx dy$ 计算概率时, 实际上就是求积分 $\iint_D f(x,y) dx dy$, 其中积分区域 $D: x+y \leq 1$ 就是由随机变量的范围 $X+Y \leq 1$ 而来的. 由于被积函数 $f(x,y) \neq 0$ 的范围是 $0 < x < y$, 因此实际要积分的区域应该是 $0 < x < y$ 与 $x+y \leq 1$ 的公共部分, 即图中水平阴影线与垂直阴影线的交集, 这种计算方法在计算概率和求随机变量函数分布时是经常要遇到的.

449 【答案】 $\frac{1}{4}F(y) + \frac{3}{4}F(y-1)$

【分析】 $X_1 \sim B(1, \frac{3}{4})$, 即
$$P \begin{array}{c|cc} X_1 & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}.$$

由全概率公式

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{X_1 + X_2 \leq y\} \\ &= P\{X_1 = 0\}P\{X_1 + X_2 \leq y \mid X_1 = 0\} + P\{X_1 = 1\}P\{X_1 + X_2 \leq y \mid X_1 = 1\} \\ &= \frac{1}{4}P\{X_2 \leq y \mid X_1 = 0\} + \frac{3}{4}P\{1 + X_2 \leq y \mid X_1 = 1\} \\ &= \frac{1}{4}P\{X_2 \leq y\} + \frac{3}{4}P\{X_2 \leq y-1\} \\ &= \frac{1}{4}F(y) + \frac{3}{4}F(y-1). \end{aligned}$$

【评注】 如果 $X_1 + X_2$ 中有一个是离散型的随机变量, 则一般对离散型的随机变量可能取值用全概率公式来求解, 就如本题所用的方法.

450 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 $P\{X = 1 \mid X + Y = 2\} = \frac{P\{X = 1, X + Y = 2\}}{P\{X + Y = 2\}}.$

$$\begin{aligned} P\{X + Y = 2\} &= \sum_{k=0}^2 P\{X = k, Y = 2 - k\} = \sum_{k=0}^2 P\{X = k\}P\{Y = 2 - k\} \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{e^{-1}}{k!} \cdot \frac{e^{-1}}{(2-k)!} = e^{-2} \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!(2-k)!} = e^{-2} \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \cdot e^{-2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X = 1, X + Y = 2\} &= P\{X = 1, Y = 1\} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\} \\ &= e^{-1} \cdot e^{-1} = e^{-2}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } P\{X = 1 \mid X + Y = 2\} = \frac{e^{-2}}{2 \cdot e^{-2}} = \frac{1}{2}.$$

【评注】 可以证明: 当相互独立的随机变量 X 和 Y 均服从 $P(\lambda)$ 分布, 则 $X + Y \sim P(2\lambda)$, 这时 $P\{X + Y = 2\} = \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-2\lambda}.$



451 【答案】 $\frac{1}{2}$ 【分析】 $(X, Y) \sim N(1, -2; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 所以 X 与 Y 相互独立, 且

$$X \sim N(1, \sigma^2) \text{ 和 } Y \sim N(-2, \sigma^2),$$

也就有 $(X-1) \sim N(0, \sigma^2)$ 与 $(Y+2) \sim N(0, \sigma^2)$, 且 $(X-1)$ 与 $(Y+2)$ 也相互独立.

$$\begin{aligned} P\{XY < 2 - 2X + Y\} &= P\{XY + 2X - Y - 2 < 0\} = P\{(X-1)(Y+2) < 0\} \\ &= P\{X-1 < 0, Y+2 > 0\} + P\{X-1 > 0, Y+2 < 0\} \\ &= P\{X-1 < 0\}P\{Y+2 > 0\} + P\{X-1 > 0\}P\{Y+2 < 0\} \end{aligned}$$

根据正态分布的对称性:

$$P\{X-1 < 0\} = P\{X-1 > 0\} = P\{Y+2 > 0\} = P\{Y+2 < 0\} = \frac{1}{2}$$

$$\text{所以 } P\{XY < 2 - 2X + Y\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

452 【答案】 $\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$ 【分析】 $F_Y(y) = P\{X_1 + X_2 X_3 \leq y\}$. 根据全概率公式:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{X_3 = -1\}P\{X_1 + X_2 X_3 \leq y \mid X_3 = -1\} \\ &\quad + P\{X_3 = 1\}P\{X_1 + X_2 X_3 \leq y \mid X_3 = 1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X_1 - X_2 \leq y \mid X_3 = -1\} + \frac{1}{2}P\{X_1 + X_2 \leq y \mid X_3 = 1\}, \end{aligned}$$

而 X_3 同 X_1, X_2 是独立的. 故

$$F_Y(y) = \frac{1}{2}P\{X_1 - X_2 \leq y\} + \frac{1}{2}P\{X_1 + X_2 \leq y\}.$$

又因为 X_2, X_3 也是独立的, 均为 $N(0, 1)$ 分布, 所以

$$X_1 - X_2 \sim N(0, 2) \text{ 和 } X_1 + X_2 \sim N(0, 2).$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } F_Y(y) &= \frac{1}{2}P\left\{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \leq \frac{y}{\sqrt{2}}\right\} + \frac{1}{2}P\left\{\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \leq \frac{y}{\sqrt{2}}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

453 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 由分布函数定义得

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}, 1\right) &= P\left\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq 1\right\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 0, Y = 1\} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

454 【答案】 $\frac{1}{2}$ 【分析】 首先要求出 $f(x)$ 中的未知参数 a, b ; 而后由 $P\{|X| < \sqrt{2}\} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x) dx$ 求得概率.

$$\text{因为 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{又 } 2 = EX^2 = \int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4} = \frac{b^2 + a^2}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b^2 + a^2}{2} \quad (2)$$

$$\text{由(1)(2)求得 } a = 1, b = \sqrt{3}. \text{ 所以 } f(x) = \begin{cases} x, & 1 < x < \sqrt{3} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$P\{|X| < \sqrt{2}\} = P\{-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}\} = \int_1^{\sqrt{2}} x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

B 组

455 【答案】 0.3

【分析】 由于 $0.1 + 0.2 + \alpha + \beta + 0.1 + 0.2 = 0.6 + \alpha + \beta = 1$, 即 $\alpha + \beta = 0.4$, 又 $0.5 = P\{X^2 + Y^2 = 1\} = P\{X^2 = 0, Y^2 = 1\} + P\{X^2 = 1, Y^2 = 0\}$
 $= P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 0, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = 0\}$
 $= \alpha + 0.1 + 0.1 = \alpha + 0.2.$

故 $\alpha = 0.3$ 也就有 $\beta = 0.1$;

$$P\{X^2 Y^2 = 1\} = P\{X^2 = 1, Y^2 = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = -1\} \\ = 0.2 + \beta = 0.3.$$

本题所给条件 X^2, Y^2 , 所以本题也可以转换成:

		Y^2	
		0	1
已知	X^2	0	0.2 $\alpha + 0.1$
	1	0.1	$\beta + 0.2$

且 $P\{X^2 + Y^2 = 1\} = 0.5$, 求 $P\{X^2 Y^2 = 1\}$.

显然 $\alpha + 0.1 + \beta + 0.2 = 0.7, \alpha + \beta = 0.4$, 又 $P\{X^2 + Y^2 = 1\} = \alpha + 0.1 + 0.1 = 0.5$, 即 $\alpha = 0.3$, 则 $P\{X^2 Y^2 = 1\} = \beta + 0.2 = 0.3$.

456 【答案】 0

【分析】 $P\{\max(X, Y) > \mu\} - P\{\min(X, Y) < \mu\}$
 $= 1 - P\{\max(X, Y) \leq \mu\} - [1 - P\{\min(X, Y) \geq \mu\}]$
 $= -P\{\max(X, Y) \leq \mu\} + P\{\min(X, Y) \geq \mu\}$
 $= -P\{X \leq \mu, Y \leq \mu\} + P\{X \geq \mu, Y \geq \mu\}$
 $= -P\{X \leq \mu\}P\{Y \leq \mu\} + P\{X \geq \mu\}P\{Y \geq \mu\}$
 $= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.$

【评注】 如果本题 X 与 Y 不相互独立, 结论也一样, 推导稍麻烦些.

457 【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】 $P\{1 < \max(X, Y) \leq 2\} = P\{\max(X, Y) \leq 2\} - P\{\max(X, Y) \leq 1\}$



$$\begin{aligned}
 &= P\{X \leq 2, Y \leq 2\} - P\{X \leq 1, Y \leq 1\} \\
 &= P\{X \leq 2\}P\{Y \leq 2\} - P\{X \leq 1\}P\{Y \leq 1\} \\
 &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

458 【答案】 μ_2

【分析】 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; 0)$, 所以 X, Y 相互独立.

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y), X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

由正态分布的密度函数对称性, $F_X(\mu_1) = P\{X \leq \mu_1\} = \frac{1}{2}$.

$$F(\mu_1, y) = F_X(\mu_1)F_Y(y) = \frac{1}{2}F_Y(y) = \frac{1}{4}, \text{ 就有 } F_Y(y) = \frac{1}{2}, \text{ 即 } y = \mu_2.$$

459 【答案】 $\Phi(x)$

【分析】 将事件“ $Y = -1$ ”和“ $Y = 1$ ”看成一完备事件组, 则由全概率公式

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P\{Z \leq x\} = P\{XY \leq x\} \\
 &= P\{Y = -1\}P\{XY \leq x | Y = -1\} + P\{Y = 1\}P\{XY \leq x | Y = 1\} \\
 &= \frac{1}{2}P\{-X \leq x | Y = -1\} + \frac{1}{2}P\{X \leq x | Y = 1\} \\
 &= \frac{1}{2}P\{-X \leq x\} + \frac{1}{2}P\{X \leq x\} = \frac{1}{2}P\{X \geq -x\} + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
 &= \frac{1}{2}[1 - P\{X < -x\}] + \frac{1}{2}\Phi(x) = \frac{1}{2}[1 - P\{X \leq -x\}] + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
 &= \frac{1}{2}[1 - \Phi(-x)] + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
 &= \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi(x) = \Phi(x).
 \end{aligned}$$

【评注】 本题解法常用于两独立随机变量其中一个为离散型的情况, 一般先处理离散用全概率公式.

460 【答案】 $N(0, \mu_2; 1, \sigma_2^2; \rho)$

【分析】 显然 $\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, Y\right)$ 也服从二维正态.

由于 $E\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right) = 0, D\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right) = 1$. 故 $\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, Y\right) \sim N(0, \mu_2; 1, \sigma_2^2; \rho_1)$,

其中 ρ_1 是 $\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}$ 与 Y 的相关系数.

$$\rho_1 = \frac{\text{Cov}\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, Y\right)}{\sqrt{D\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}\right)} \sqrt{DY}} = \frac{\text{Cov}(X - \mu_1, Y)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_1 \sigma_2} = \rho.$$



A 组

461 【答案】 $\sigma^2(\sigma^2 + 2\mu^2)$

【分析】 $D(X_1 X_2) = E(X_1 X_2)^2 - [E(X_1 X_2)]^2 = E(X_1^2 X_2^2) - (EX_1 EX_2)^2$.

显然 X_1^2 与 X_2^2 也相互独立, $EX_1 = EX_2 = \mu$, 所以

$$D(X_1 X_2) = EX_1^2 \cdot EX_2^2 - \mu^4 = (\sigma^2 + \mu^2)^2 - \mu^4 = \sigma^4 + 2\sigma^2 \mu^2 = \sigma^2(\sigma^2 + 2\mu^2).$$

【评注】 X_1 与 X_2 独立, $E(X_1 X_2) = EX_1 \cdot EX_2$, 而 $D(X_1 X_2) \neq DX_1 \cdot DX_2$.

462 【答案】 $\frac{\sqrt{e}}{2(\sqrt{e}-1)}$

【分析】 记 $c = \frac{1}{\sqrt{e}-1}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, 则 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} c, k=1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{c\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{c\lambda^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) e^{\lambda} \cdot c = \lambda \cdot e^{\lambda} \cdot c \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}-1} = \frac{\sqrt{e}}{2(\sqrt{e}-1)}. \end{aligned}$$

这里用到泊松分布的期望公式 $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda$.

463 【答案】 1

【分析】 $DX = DY = \frac{1}{4}$,

$$1 = D(X+Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2\text{Cov}(X, Y),$$

$$\text{解得 } \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4}, \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4}}} = 1.$$

464 【答案】 1

【分析】 $F(x) = \begin{cases} a - e^{-bx}, & x > 0 \\ c, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(x) = F'(x) = \begin{cases} be^{-bx}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.

对比指数分布的概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

得 $\lambda = 1 = b$. $D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$.



465 【答案】 1

【分析】 $E[(X-1)(X-2)] = E(X^2 - 3X + 2) = E(X^2) - 3E(X) + 2$
 $= D(X) + (EX)^2 - 3\lambda + 2$
 $= \lambda + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 1$
 即 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, (\lambda - 1)^2 = 0, \lambda = 1$.

466 【答案】 $(n-2)\sigma^2$

【分析】 $\text{Cov}(Y_1, Y_n) = \text{Cov}\left(\sum_{i=2}^n X_i, \sum_{j=1}^{n-1} X_j\right) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{n-1} \text{Cov}(X_i, X_j)$
 $= \sum_{j=1}^{n-1} \text{Cov}(X_n, X_j) + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} \text{Cov}(X_i, X_j) + \sum_{i=2}^n \text{Cov}(X_i, X_1)$
 $= 0 + \sum_{k=2}^{n-1} \text{Cov}(X_k, X_k) + 0 = (n-2)\sigma^2$.

B 组

467 【答案】 2

【分析】 已知 $X_i \sim P(\lambda_i)$ 且 X_1 与 X_2 相互独立, 所以 $EX_i = DX_i = \lambda_i (i = 1, 2)$.
 $E(X_1 + X_2)^2 = E(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) = EX_1^2 + 2EX_1EX_2 + EX_2^2$
 $= \lambda_1 + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_2^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2$
 为求得最终结果我们需要由已知条件计算出 $\lambda_1 + \lambda_2$.
 因为 $P\{X_1 + X_2 > 0\} = 1 - P\{X_1 + X_2 \leq 0\} = 1 - P\{X_1 + X_2 = 0\}$
 $= 1 - P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = 1 - P\{X_1 = 0\}P\{X_2 = 0\}$
 $= 1 - e^{-\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_2} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} = 1 - e^{-1}$

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

故 $E(X_1 + X_2)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = 2$.

468 【答案】 $\frac{n-1}{n}\sigma^2$

【分析】 $D(X_1 - \bar{X}) = D\left(X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = D\left(\frac{n-1}{n}X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right)$
 $= \frac{(n-1)^2}{n^2}DX_1 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n DX_i = \frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2 + (n-1)\frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.

【评注】 本题计算 $D(X_1 - \bar{X})$ 充分利用 $X_1, \dots, X_n$ 的相互独立性, 计算量较小, 如果用其他方法会加大计算量, 例如:

$$D(X_1 - \bar{X}) = DX_1 + D\bar{X} - 2\text{Cov}(X_1, \bar{X}) = \dots;$$

$$D(X_1 - \bar{X}) = E(X_1 - \bar{X})^2 - [E(X_1 - \bar{X})]^2 = \dots$$

所以本题的方法应作为基本方法加以掌握.



469 【答案】 $1 - e^{-1}$

【分析】 如果把 Y 看成 X 的函数, 先求出 Y 的概率密度, 然后求 $E(Y)$ 会较麻烦. 可以直接用公式:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为 } X \text{ 的密度函数.}$$

$$\begin{aligned} \text{现 } E(Y) &= E(\min\{|X|, 1\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \min(|x|, 1)f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \min(|x|, 1)e^{-x}dx = \int_0^1 xe^{-x}dx + \int_1^{+\infty} 1 \cdot e^{-x}dx \\ &= 1 - 2e^{-1} + e^{-1} = 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$

470 【答案】 $1 - \frac{2}{\pi}$

【分析】 X_1 与 X_2 独立均服从 $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 记 $Z = X_1 - X_2$, 则 $Z \sim N(0, 1)$, 有概率密度函数 $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$.

$$\begin{aligned} D(|X_1 - X_2|) &= D(|Z|) = E(|Z|^2) - (E|Z|)^2 = E(Z^2) - (E|Z|)^2 \\ &= D(Z) + [E(Z)]^2 - (E|Z|)^2 \end{aligned}$$

显然, $D(Z) = 1, E(Z) = 0$,

$$\begin{aligned} E|Z| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \varphi(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(\frac{z^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

$$\text{因此, } D(|X_1 - X_2|) = 1 + 0 - \frac{2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

大数定律和中心极限定理

A 组

471 【答案】 2

【分析】 切比雪夫不等式为 $P\{|X - EX| \geq \epsilon\} \leq \frac{DX}{\epsilon^2}$, 现 $EX = \frac{b-1}{2} = 1$, 即 $b = 3$.

所以 $X \sim U[-1, 3]$. 故 $DX = \frac{(3+1)^2}{12} = \frac{4}{3}$.

现 $\frac{DX}{\epsilon^2} = \frac{1}{3}$, 即 $\frac{4}{3\epsilon^2} = \frac{1}{3}$, $\epsilon = 2$.

472 【答案】 $\frac{7}{2}$



【分析】 题目要求我们计算 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} ?$ 为此我们需要应用大数定律或依概率收敛的定义与性质来计算. 由题设知 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

且 $EX_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

根据辛钦大数定律: $\bar{X} \xrightarrow{P} \frac{7}{2} (n \rightarrow \infty)$.

473 【答案】 $N\left(0, \frac{2n}{\lambda^2}\right)$

【分析】 显然 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ 独立同分布. $EZ_i = E(X_{2i} - X_{2i-1}) = 0$,

$$DZ_i = D(X_{2i} - X_{2i-1}) = DX_{2i} + DX_{2i-1} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

根据中心极限定理, 当 n 充分大时, $\sum_{i=1}^n Z_i$ 近似服从 $N\left(0, \frac{2n}{\lambda^2}\right)$.

数理统计的基本概念

A 组

474 【答案】 $N\left(0, \frac{n-1}{n}\right)$

【分析】 $X_1 - \bar{X} = X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = X_1 - \frac{1}{n} X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i = \frac{n-1}{n} X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$

所以 $X_1 - \bar{X}$ 是相互独立的 n 个标准正态分布随机变量的线性组合, $X_1 - \bar{X}$ 必服从正态分布 $N(*, *)$.

$$E(X_1 - \bar{X}) = \frac{n-1}{n} EX_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n EX_i = 0;$$

$$D(X_1 - \bar{X}) = \frac{(n-1)^2}{n^2} DX_1 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n DX_i = \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} = \frac{n^2 - n}{n^2},$$

所以 $(X_1 - \bar{X}) \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\right)$.

475 【答案】 $[F(y)]^n$

【分析】 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq y\}$
 $= P\{X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y\}$
 $= P\{X_1 \leq y\} P\{X_2 \leq y\} \cdots P\{X_n \leq y\}$
 $= F(y) F(y) \cdots F(y) = [F(y)]^n.$



476 【答案】 2

【分析】 显然 $E(S^2) = D(X)$, 而 $DX = E(X - EX)^2$.

$$\begin{aligned} \text{现求 } EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{\mu} x \cdot e^{x-\mu}dx + \int_{\mu}^{+\infty} x e^{\mu-x}dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-\mu}(xe^x - e^x) \Big|_{-\infty}^{\mu} + e^{\mu}(-xe^{-x} - e^{-x}) \Big|_{\mu}^{+\infty} \right] = \mu. \\ DX &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}dx = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}dt = 2 \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 2. \end{aligned}$$

【评注】 EX 可以由 $f(x)$ 在 $x = \mu$ 处的对称性, 直接得出 $EX = \mu$.

477 【答案】 2 和 4

【分析】 $\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(2), \left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_5}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(4),$

且它们是相互独立的. 故

$$\frac{\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{\sigma}\right)^2}{2} \Bigg/ \frac{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_5}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma}\right)^2}{4} = 2 \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2} \sim F(2, 4).$$

478 【答案】 $\frac{2}{\lambda^2}$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } ET &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [DX_i + (EX_i)^2] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

479 【答案】 $\frac{\lambda-1}{\lambda^2}$

【分析】 总体 $X \sim E(\lambda), E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

$$\begin{aligned} ET &= E(\bar{X} - S^2) = E(\bar{X}) - E(S^2) \\ &= E(X) - D(X) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\lambda-1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

B 组

480 【答案】 $C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$

【分析】 $X_i \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right), X_i$ 为一次伯努利试验的结果, X_i 相互独立, $i = 1, 2, \dots, n$.



所以 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 可以看成 n 次独立重复试验, 即 $\sum_{i=1}^n X_i \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

$$P\left\{\bar{X} = \frac{k}{n}\right\} = P\{n\bar{X} = k\} = P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = k\right\} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

481 【答案】 0.8

【分析】 $X \sim t(n)$, 所以根据 $t(n)$ 分布随机变量的典型模式, 可以表示

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{Y_1/n}} \sim t(n)$$

其中 ① $X_1 \sim N(0, 1)$; ② $Y_1 \sim \chi^2(n)$; ③ X_1, Y_1 相互独立.

现来考虑 $X^2 = \frac{X_1^2}{Y_1/n} = \frac{X_1^2/1}{Y_1/n} \sim F(1, n)$, 其中 ① $X_1^2 \sim \chi^2(1)$; ② $Y_1 \sim \chi^2(n)$; ③ X_1^2, Y_1 相互独立.

由于 $t(n)$ 的概率密度是偶函数, 故 $P\{X > C\} = 0.6$, 可知 $C < 0$.

$$\begin{aligned} P\{Y > C^2\} &= P\{X^2 > C^2\} = P\{X > -C\} + P\{X < C\} = 2P\{X < C\} \\ &= 2[1 - P\{X \geq C\}] = 2[1 - P\{X > C\}] = 2(1 - 0.6) = 0.8. \end{aligned}$$

参数估计

A 组

482 【答案】 $\sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$

【分析】 由于 $EX = 0$, 总体一阶矩没有包含未知参数 a , 故采用二阶矩.

总体二阶矩 $EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{a^2}{3}$, 样本二阶矩为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$,

$$EX^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \text{ 即 } \frac{a^2}{3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, a = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

483 【答案】 $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$

【分析】 $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \theta^{-n}, & 0 \leq \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \leq \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

要使 $L(\theta)$ 最大, 只有使 θ 最小, 但由于 $x_i \leq \theta, i = 1, 2, \dots$.

所以, 取 $\theta = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ 最小了, 即最大似然估计量 $\hat{\theta} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

或者 $\hat{\theta} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.



B 组

484 【答案】 $\frac{9}{20}$

【分析】 只有一个参数 θ , 矩估计量用 $EX = \bar{X}$.

$$EX = 0 \cdot \theta^2 + 1 \cdot 2\theta(1-\theta) + 2 \cdot (1-\theta)^2 = 2(1-\theta)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10} (5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0) = \frac{11}{10}$$

总之, $2(1-\theta) = \frac{11}{10}, \hat{\theta} = \frac{9}{20}$.

485 【答案】 $\frac{2}{\bar{X}}$

【分析】 似然函数 $L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \lambda^{2n} \prod_{i=1}^n x_i \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, x_i > 0$.

等式两端取对数, $\ln L = 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$.

$$\frac{d \ln L}{d \lambda} = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i, \lambda = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2n}{n \bar{x}} = \frac{2}{\bar{x}} = 0,$$

解得 $\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}$.



选 择 题

随机事件与概率

A 组

486 【答案】 B【分析】 因为 $A \cup B = \bar{A} \cup \bar{B}$, 所以 $A \cup (A \cup B) = A \cup (\bar{A} \cup \bar{B})$.即 $A \cup B = \Omega \cup \bar{B} = \Omega$, 因而 $\bar{A} \cup \bar{B} = A \cup B = \Omega$.故 $\overline{A \cup B} = \bar{\Omega}$, 即 $AB = \emptyset$. 答案应选(B).**487** 【答案】 A【分析】 设 $P(A) = x$, 则 $P(A) = P(B) = P(C) = x$, 且

$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = x^2.$$

由公式

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

$$\text{得 } \frac{9}{16} = 3x - 3x^2 + 0, \text{ 所以 } x^2 - x + \frac{3}{16} = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{4} \text{ 或 } \frac{3}{4}.$$

$$x = \frac{3}{4} \text{ 是不可能的, 因为 } P(A \cup B \cup C) \geq P(A), \text{ 不可能 } \frac{9}{16} \geq \frac{3}{4}, \text{ 故只能有 } x = \frac{1}{4}.$$

488 【答案】 D【分析】 已知 $AB = \emptyset$, 我们无法断言 $\bar{A}\bar{B} = \emptyset$ 或 $\neq \emptyset$, 因此(A)(B)不能选. 由于 $AB = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \bar{B}$, 所以 $A \cup \bar{B} = \bar{B}$, 选择(D).

【评注】 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$ 与 $P(\bar{A}\bar{B}) \neq 0$, 并非是逻辑关系中的“非此即彼”, 因为 A, B 并不是事先给出的确定的事件, 而是满足条件“ $AB = \emptyset$ ”的无穷多个事件, 所以 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$ 有时成立, 有时不成立. 例如 $A = \bar{B}$, 则 $AB = \bar{B}B = \emptyset, \bar{A}\bar{B} = B\bar{B} = \emptyset$, 所以 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$; 又如事件 $A = \left\{0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right\}, B = \left\{\frac{3}{4} \leq X \leq 1\right\}$, 其中随机变量 X 在 $[0, 1]$ 上服从均匀分布, 则 $AB = \emptyset$, 而 $\bar{A}\bar{B} = \{-\infty < X < 0\} \cup \left\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4}\right\} \cup \{1 < X < +\infty\}$, $P(\bar{A}\bar{B}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{4} \neq 0$.

489 【答案】 A【分析】 由于 $AB = \emptyset$, 就有 $A \subset \bar{B}$, 也就有 $P(A) \leq P(\bar{B})$.若 $P(A) = 1$, 则 $P(\bar{B}) \geq P(A) = 1$, 即 $P(\bar{B}) = 1$. 答案选(A).若 $P(A) = 0$, 则只能得到 $P(\bar{B}) \geq 0$.**490** 【答案】 B【分析】 这是一道考查概率性质的选择题, 应用概率运算性质知, $P(A \cup B) = P(A) +$ 

$P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B)$, 选项(A) 不成立. $P(A - B) = P(A) - P(AB) \geq P(A) - P(B)$, 故正确选项为(B). 而 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \leq \frac{P(A)}{P(B)}$, 所以(D) 不成立. 至于选项(C), 它可能成立也可能不成立, 例如 $AB = \emptyset, P(A) > 0, P(B) > 0$, 则 $P(AB) = 0 < P(A)P(B)$; 如果 $A \subset B$, 则 $P(AB) = P(A) \geq P(A)P(B)$.

491 【答案】 C

【分析】 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 1$, 即 $P(AB) = P(A)$, 所以
 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0$.

答案应选(C).

492 【答案】 D

【分析】 $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$, 即 $2P(AB) \geq P(A) + P(B)$,

也就有 $P(AB) \geq P(A) + P(B) - P(AB) = P(A \cup B)$. 显然 $P(AB) \leq P(A \cup B)$.
 所以必有 $P(AB) = P(A \cup B)$, 也必有 $P(AB) = P(A) = P(B) = P(A \cup B)$.
 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0$. 答案应选(D).

B 组

493 【答案】 B

【分析】 由题设知, 试验的基本事件共有 4 个:

$w_1 = \text{“正, 正”}, w_2 = \text{“正, 反”}, w_3 = \text{“反, 正”}, w_4 = \text{“反, 反”},$

所以 $A = \{w_1, w_2\}, B = \{w_2, w_4\}, C = \{w_2, w_3, w_4\}, P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{3}{4},$

显然 A 与 B 独立, $B \subset C$, 故 B, C 不独立, 选项(A) 不成立.

又 $BC = B, ABC = AB, P(ABC) = P(AB) = P(A)P(B) = P(A)P(BC)$, 即 A 与 BC 独立, 选项(B) 正确.

而 $P(ABC) = P(A)P(B) = \frac{1}{4} \neq P(B)P(AC) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}, P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(C)P(AB) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$, 故选项(C)(D) 不正确.

494 【答案】 C

【分析】 已知 $P(\bar{A}|B) = P(B|\bar{A}), \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}$, 即 $P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

所以 $P(A) + P(B) = 1$. 选项(A)(B) 是 A 与 B 独立的充要条件, 因此不能选. 由“对称性”知选项(C) 正确, 应选(C).

事实上, $P(\bar{B}|A) = P(A|\bar{B}), \frac{P(\bar{B}A)}{P(A)} = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$, 即 $P(A) = P(\bar{B}) = 1 - P(B)$, 所以
 $P(A) + P(B) = 1$.



选项(D)未必成立,这是因为 $P(A|B) = P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{1}{2}$ 即 $\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{1}{2}P(B)$, 此与 $P(\bar{A}|B) = P(B|\bar{A})$ 不等价.

495 【答案】 C

【分析】 A, B, C 已两两独立, 只要满足 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 就有 A, B, C 相互独立. 现 $A-B$ 和 C 独立, 即有 $P(A\bar{B}C) = P(A\bar{B})P(C)$. 又因为 A, B 独立, 所以 $A, \bar{B}$ 也独立, $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$. 所以 $P(A\bar{B}C) = P(A)P(\bar{B})P(C)$. 又 A, B, C 两两独立, 即有 $A, \bar{B}, C$ 两两独立, 所以 $A, \bar{B}, C$ 相互独立, 也就有 A, B, C 相互独立, 答案应选(C).

496 【答案】 B

【分析】 $P[(A_1 \cup A_2) | B] = \frac{P[(A_1 \cup A_2)B]}{P(B)} = \frac{P(A_1B \cup A_2B)}{P(B)}$, 而

$$P(A_1 | B) + P(A_2 | B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \frac{P(A_2B)}{P(B)}$$

故 $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$, 就有 $P(A_1B \cup A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B)$. 答案应选(B).

随机变量及其分布

A 组

497 【答案】 D

【分析】 由图形立即得到正确选项为(D), 事实上, 由题设知

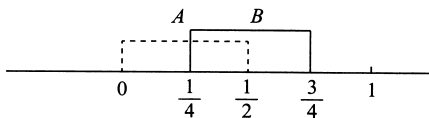
$$X \sim f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\text{所以 } P(A) = P\left\{0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = P\left\{\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right\} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx = \frac{1}{2},$$

$$P(AB) = P\left\{\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4},$$

因此成立 $P(AB) = P(A)P(B)$, 即 A 与 B 相互独立.



498 【答案】 C

【分析】 由于 $F(x)$ 是单调不减的非负函数, 所以(A)(B)不成立. 已知 $f(x)$ 是偶函数, 因此有 $F(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t) dt = \int_x^{+\infty} f(t) dt, F(x) + F(-x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt + \int_x^{+\infty} f(t) dt = 1$, 选择(C). 而 $2F(x) - F(-x) = 2 \int_{-\infty}^x f(t) dt - \int_x^{+\infty} f(t) dt = 2 - 3 \int_x^{+\infty} f(t) dt \neq 1$, 选项(D)不成立.



499 【答案】 B

【分析】 由于 $F(x)$ 是右连续函数, 故 $F(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} 1 = 1$.

所以应选(B).

$F(x)$ 不一定左连续, 所以当 $x < a$ 时, $F(x) = 0$ 不能推出 $F(a) = 0$. (A) 不正确.

因 $F(a) = P\{X \leq a\} = P\{X < a\} + P\{X = a\} = \frac{1}{2} + P\{X = a\}$. 故(C) 不正确.

$P\{X \geq a\} = \frac{1}{2}$ 即 $P\{X < a\} = \frac{1}{2}$. 同(C), 故(D) 也不正确.

500 【答案】 C

【分析】 函数 $F(x)$ 成为分布函数的充要条件为:

① $F(x)$ 单调不减; ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; ③ $F(x)$ 右连续.

(A) $F(ax)$ 当 $a < 0$ 时, ①, ②, ③ 都不满足, 故 $F(ax)$ 不是分布函数.

(B) $F(x^2 + 1)$ 不满足条件 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, 不是分布函数.

(C) $F(x^3 - 1)$ 条件 ①, ②, ③ 均成立, 是分布函数.

(D) $F(|x|)$ 不满足条件 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, 不是分布函数.

501 【答案】 B

【分析】 函数 $f(x)$ 为概率密度函数的充要条件为 ① $f(x) \geq 0$, ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

(A) $f(2x)$ 不是概率密度函数. 因 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \neq 1$.

(B) $f(2-x)$ 是概率密度函数. 因 $f(2-x) \geq 0$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(2-x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(2-x) d(2-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

对(C)(D) 容易举出反例, 使 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2) dx$ 均不为 1.

例如 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 是概率密度函数.

但 $f^2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 和 $f(x^2) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

显然都不是概率密度函数.

502 【答案】 C

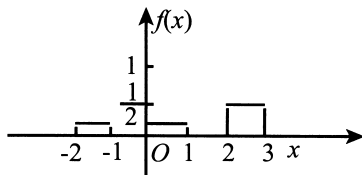
【分析】 由题设 $P\{X > k\} = P\{X < k\}, P\{X = k\} = 0$.

又 $P\{X > k\} + P\{X < k\} + P\{X = k\} = 1$, 所以 k 应使

$$P\{X < k\} = \frac{1}{2},$$

即

$$\int_{-\infty}^k f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

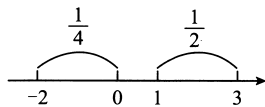


由密度函数图形及概率的几何意义知正确选项是(C). 如果通过计算 $\int_{-\infty}^k f(x)dx = \frac{1}{2}$ 来确定正确选项, 此时需要按 k 的取值不同来计算, 其结果是一样的.

503 【答案】 C

【分析】 $P\{-2 < X < 0\} = \frac{1}{4}$ 和 $P\{1 < X < 3\} = \frac{1}{2}$, 则

$$0 < P\{0 < X < 1\} \leq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



从 $\begin{cases} P\{1 < X < 3\} = \frac{1}{2} \\ 0 < P\{0 < X < 1\} \leq \frac{1}{4} \end{cases}$, 得到 $P\{0 < X < 1\} = \frac{1}{4}$. 进一步有 $P\{-1 < X < 0\} = \frac{1}{4}$,

即 $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$. 答案应选(C).

504 【答案】 C

【分析】 记 $-X$ 的分布函数和概率密度分别为 $F_1(x)$ 和 $f_1(x)$. 则

$$\begin{aligned} F_1(x) &= P\{-X \leq x\} = P\{X \geq -x\} = 1 - P\{X < -x\} \\ &= 1 - P\{X \leq -x\} = 1 - F(-x) \end{aligned}$$

$$f_1(x) = F_1'(x) = [1 - F(-x)]' = f(-x)$$

故答案选(C).

【评注】 X 为连续型随机变量, 必有 $F_1'(x) = f_1(x)$, 只有(C) 满足此条件.

505 【答案】 B

【分析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a + be^{-x}) = a = 1$. $F(x)$ 为连续型随机变量 X 的分布函数, 故 $F(x)$ 必连续, $F(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 即 $a + b = 0, b = -1$.

506 【答案】 A

【分析】 设 $Y = 2X + 3$, 则 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{2X + 3 \leq x\} = P\left\{X \leq \frac{x-3}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{x-3}{2}} f(x)dx$$

$Y = 2X + 3$ 的概率密度

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = \left[\int_{-\infty}^{\frac{x-3}{2}} f(x)dx \right]' = f\left(\frac{x-3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} f\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

答案应选(A).



B 组

507 【答案】 B

【分析】 分布律必定成立 $\sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\} = 1$, 即 $1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{k!} e^{-2} = C e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = C \cdot e^{-1}$,

所以 $C = e$. 这里用到了公式 $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $-\infty < x < +\infty$.

本题也可对比泊松分布 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\dots$.

可以看出当 $\lambda=1$ 时, 就有 $P\{X=k\} = \frac{1}{k!} e^{-1}$, $k=0,1,2,\dots$, 即 $C=e$, 选(B).

508 【答案】 D

【分析】 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx = a+b=1$, 知四个选项均符合

这个要求, 因此只好通过 $F(0) = \frac{1}{8}$ 确定正确选项.

$$\begin{aligned} \text{由于 } F(0) &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx = a \int_{-\infty}^0 f_1(x) dx + b \int_{-\infty}^0 f_2(x) dx \\ &= \frac{a}{2} + 0 = \frac{a}{2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

所以 $a = \frac{1}{4}$, 正确选项为(D).

509 【答案】 C

【分析】 X 落入 $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, +\infty)$ 的概率应为 $\frac{7}{100}, \frac{24}{100}$,

$\frac{38}{100}, \frac{24}{100}, \frac{7}{100}$, 即 $0.07, 0.24, 0.38, 0.24, 0.07$.

$$P\{X \leq x_4\} = 1 - P\{X > x_4\} = 1 - 0.07 = 0.93 = \Phi(1.5).$$

而 $X \sim N(15, 4)$, 所以 $\frac{X-15}{2} \sim N(0, 1)$.

$$P\{X \leq x_4\} = P\left\{\frac{X-15}{2} \leq \frac{x_4-15}{2}\right\} = \Phi\left(\frac{x_4-15}{2}\right).$$

所以 $\frac{x_4-15}{2} = 1.5$, 解得 $x_4 = 18$. 又

$$P\{X \leq x_3\} = 1 - P\{X > x_3\} = 1 - 0.24 - 0.07 = 0.69 = \Phi(0.5)$$

$$P\{X \leq x_3\} = P\left\{\frac{X-15}{2} \leq \frac{x_3-15}{2}\right\} = \Phi\left(\frac{x_3-15}{2}\right)$$

得 $\frac{x_3-15}{2} = 0.5$, 故 $x_3 = 16$.

由对称性 x_1 与 x_4, x_2 与 x_3 都关于 15 对称.

所以

$$x_1 = 15 - (x_4 - 15) = 12, x_2 = 15 - (x_3 - 15) = 14.$$



A 组

510 【答案】 D**【分析】** 记 $Y = \max(X_1, X_2)$ 的分布为 $F_Y(x)$, 概率密度为 $f_Y(x)$, 则

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\{Y \leq x\} = P\{\max(X_1, X_2) \leq x\} = P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq x\} = F_1(x)F_2(x) \\ f_Y(x) &= F'_Y(x) = [F_1(x)F_2(x)]' = f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x) \end{aligned}$$

答案选(D).

511 【答案】 D**【分析】** 设标准正态分布的分布函数为 $\Phi(x)$, 则

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x, X \leq y\} \\ &= P\{X \leq \min(x, y)\} = \Phi(\min(x, y)) \end{aligned}$$

所以, $F(a, b) = \Phi(\min(a, b)) = \frac{1}{2}$, 即 $\min(a, b) = 0$.**512 【答案】 D****【分析】** 显然我们可以通过计算每个选项中的随机变量的分布来确定正确选项, 这样会有大量计算. 我们也可以利用指数分布的一些性质来判断.如果 $X \sim E(\lambda)$, 则 $EX = \frac{1}{\lambda}$.

$$E(X+Y) = EX + EY = \frac{2}{\lambda} \neq \frac{1}{2\lambda},$$

$$E(X-Y) = EX - EY = 0 \neq \frac{1}{2\lambda},$$

所以(A)不对, (B)也不对; 当 X, Y 独立时, $\max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

显然不等于 $E(2\lambda)$ 的分布函数 $F_1(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 所以选择(D).事实上, $\min(X, Y)$ 的分布函数

$$\begin{aligned} P\{\min(X, Y) \leq x\} &= 1 - P\{\min(X, Y) > x\} \\ &= 1 - P\{X > x, Y > x\} = 1 - P\{X > x\}P\{Y > x\} \\ &= 1 - [1 - F(x)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

即 $\min(X, Y) \sim E(2\lambda)$.**【评注】** 应用数字特征可以判断随机变量不服从某种分布.**513 【答案】 B****【分析】** 两个随机变量即使是独立同分布, 也不能认为 $X = Y$, 所以不能选(A).

$$\begin{aligned}
 \text{事实上, } P\{X=Y\} &= P\{X=Y=1\} + P\{X=Y=0\} \\
 &= P\{X=1, Y=1\} + P\{X=0, Y=0\} \\
 &= P\{X=1\}P\{Y=1\} + P\{X=0\}P\{Y=0\} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

514 【答案】 C

【分析】 由题设知 $P\{X_1 + X_2 \neq 0\} = 0$, 而
 $P\{X_1 + X_2 \neq 0\} = P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} +$
 $P\{X_1 = -1, X_2 = 0\} + P\{X_1 = 0, X_2 = -1\} +$
 $P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} + P\{X_1 = 1, X_2 = 0\} +$
 $P\{X_1 = 1, X_2 = 1\},$

所以等式中的各加项概率都等于零, 据此可求得
 (X_1, X_2) 的联合分布表, 并算得

$$\begin{aligned}
 P\{X_1 = X_2\} &= P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} + P\{X_1 = \\
 0, X_2 = 0\} &+ P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \frac{1}{2}, \text{ 选择(C).}
 \end{aligned}$$

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	
-1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

515 【答案】 B

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } P\left\{\frac{X+Y}{2} + 1 = 0\right\} &= P\left\{\frac{X+Y}{2} = -1\right\} = P\{X+Y = -2\} \\
 &= P\{X = -1, Y = -1\} = P\{X = -1\}P\{Y = -1\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\left\{\frac{X+Y}{2} + 1 = 1\right\} &= P\{X+Y = 0\} = P\{X = 1, Y = -1\} + P\{X = -1, Y = 1\} \\
 &= P\{X = 1\}P\{Y = -1\} + P\{X = -1\}P\{Y = 1\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$P\left\{\frac{X+Y}{2} + 1 = 2\right\} = P\{X+Y = 2\} = P\{X = 1, Y = 1\} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\} = \frac{1}{4}.$$

所以 $\frac{X+Y}{2} + 1$ 服从分布 $B(2, \frac{1}{2})$.

不难计算出(A),(C),(D)的分布律, 它们均不服从二项分布.

$X+Y+2$	0	2	4	$X-Y+2$	0	2	4	$\frac{X-Y}{2}-1$	-2	-1	0
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

516 【答案】 D

【分析】 为确定选项, 必须知道相应事件中随机变量的分布, 由题设 $\Rightarrow X+Y \sim N(0, 2)$, $X-Y \sim N(0, 2)$ 所以选项(A)(B) 都不成立, 否则若(A) 成立, 则(B) 必成立(事实上, $P\{X+Y \geq 0\} = P\{X-Y \geq 0\} = \frac{1}{2}$).



而对于(D),有

$$\begin{aligned} P\{\min(X,Y) \geq 0\} &= P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = P\{X \geq 0\}P\{Y \geq 0\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

所以正确选项是(D).

至于(C),概率

$$\begin{aligned} P\{\max(X,Y) \geq 0\} &= 1 - P\{\max(X,Y) < 0\} = 1 - P\{X < 0, Y < 0\} \\ &= 1 - P\{X < 0\}P\{Y < 0\} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

【评注】 如果将已知分布改为 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 那么正确选项是什么?我

们应用一般模式求解,即将 (X,Y) 的分布写成矩阵形式,从而求出 $Z = g(X,Y)$ 的分布,进而便可确定正确选项.依题设 X,Y 独立,因而 (X,Y) 的分布及其函数的分布为

p_{ij}	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$
(X,Y)	$(0,-1)$	$(0,1)$	$(1,-1)$	$(1,1)$
$X+Y$	-1	1	0	2
$X-Y$	1	-1	2	0
$\max(X,Y)$	0	1	1	1
$\min(X,Y)$	-1	0	-1	1

由此可知 $P\{X+Y \geq 0\} = \frac{13}{16}, P\{X-Y \geq 0\} = \frac{15}{16}, P\{\max(X,Y) \geq 0\} = 1, P\{\min(X,Y) \geq 0\} = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{4}$. 选择(D).

如果将已知条件改为: X,Y 独立, X 概率分布为 $P\{X = -1\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}$. $Y \sim N(0,1)$, 那么正确答案是什么?(答案为(D)).

517 【答案】 A

【分析】 $\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}, EX = EY = \frac{1}{2}, DX = DY = \frac{1}{4}$

所以 $1 = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$, 即 $\text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4}$, 但 $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY$, 即

$$\frac{1}{4} = E(XY) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

所以 $E(XY) = \frac{1}{2}$, 由于 XY 的取值只有0和1.

因此, $P\{XY = 1\} = \frac{1}{2}$ 即 $P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{2}$,

$$P\{X = 0, Y = 1\} = P\{Y = 1\} - P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$



518 【答案】 C

【分析】 由题设知 $XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-P\{X=1, Y=1\} & P\{X=1, Y=1\} \end{pmatrix}$, 所以

$$E(XY) = P\{X=1, Y=1\} = \frac{5}{8},$$

$$P\{X+Y \leq 1\} = 1 - P\{X+Y > 1\} = 1 - P\{X=1, Y=1\} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8},$$

故选择(C).

519 【答案】 D

【分析】 $P\{X \leq 2Y\} = P\{X=0\} + P\{X=1, Y=1\}$

$$= \frac{2}{3} + P\{X=1\}P\{Y=1\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{9}.$$

520 【答案】 C

【分析】 $F_Z(x) = P\{Z \leq x\} = P\{\min(X, Y) \leq x\} = 1 - P\{\min(X, Y) > x\}$
 $= 1 - P\{X > x, Y > x\} = 1 - P\{X > x\}P\{Y > x\}$
 $= 1 - [1 - P\{X \leq x\}][1 - P\{Y \leq x\}]$
 $= 1 - [1 - F(x)][1 - F(x)]$
 $= 1 - [1 - F(x)]^2.$

答案应选(C).

【评注】 可以验证(A) $F^2(x)$ 是 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数.

(B) $F(x)F(y)$ 是 (X, Y) 的分布函数, 而(D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$ 不是分布函数, 因为它不满足分布函数的充要条件.

521 【答案】 C

【分析】 $P\{\min(X, Y) > 1\} = P\{X > 1, Y > 1\} = P\{X > 1\}P\{Y > 1\}$
 $= e^{-\lambda} \cdot e^{-(\lambda+2)} = e^{-2(\lambda+1)}.$

【评注】 利用公式: $X \sim E(\lambda)$ 时, $P\{X > t\} = e^{-\lambda t} (t > 0).$

B 组
522 【答案】 A

【分析】 如果 $F_Z(z)$ 在 $z = a$ 有间断点, 即 $F_Z(a) - F_Z(a-0) > 0$, 也就有 $P\{Z = a\} = F_Z(a) - F_Z(a-0) > 0$.

由全概率公式知, 对任意实数 a

$$\begin{aligned} P\{X+Y=a\} &= P\{X+Y=a, Y=1\} + P\{X+Y=a, Y=-1\} \\ &= P\{X=a-1, Y=1\} + P\{X=a+1, Y=-1\} \\ &= P\{X=a-1\}P\{Y=1\} + P\{X=a+1\}P\{Y=-1\} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2}[P\{X = a - 1\} + P\{X = a + 1\}] = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0$$

所以 $X + Y = Z$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 是连续函数. 选择(A).

【评注】 本题也可用直接求出 $F_Z(z)$ 来确定 $F_Z(z)$ 是连续函数.

523 【答案】 C

【分析】 记事件 $A = \{X \leq x\}, B = \{Y \leq y\}$, 则

$$\begin{aligned} P\{X > x, Y > y\} &= P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - P\{X \leq x\} - P\{Y \leq y\} + P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y). \end{aligned}$$

524 【答案】 A

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } P\{X = Y\} &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = k, Y = k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = k\}P\{Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2(k-1)} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (q^2)^{k-1} = p^2 \cdot \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p^2}{(1 + q)(1 - q)} \\ &= \frac{p}{1 + q} = \frac{p}{2 - p}. \end{aligned}$$

525 【答案】 C

【分析】 显然, 我们需由等式 $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$ 确定 μ , 为此需要知道 $X + Y$ 的分布. 由

题设 X 与 Y 独立知 $X + Y \sim N(2\mu, 1)$, 所以由正态分布概率密度对称性知 $P\{X + Y \leq 2\mu\} = \frac{1}{2}$,

得到 $2\mu = 1, \mu = \frac{1}{2}$, 选择(C).

526 【答案】 A

$$\text{【分析】 } (X, Y) \sim f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}},$$

可以看出 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$, 且 X 与 Y 相互独立.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

显然 $f_Y(y) > 0$. 答案应选(A).

527 【答案】 B

【分析】 方法1 由于联合分布决定边缘分布, 但边缘分布不能决定联合分布. 因此(A)



不成立,由(A)不成立,可以推知(C)(D)不一定成立,所以选择(B).

方法2 也可以举例给以说明.例如

$$(X,Y) \sim$$

$X \backslash Y$	0	1	
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$\text{和}(U,V) \sim$$

$U \backslash V$	0	1	
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

显然, (X,Y) 与 (U,V) 具有相同的边缘分布, 均服从 $B(1, \frac{1}{2})$, 但联合分布不同. 且

$$\begin{array}{c|cc} X+Y & 0 & 2 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} U+V & 1 & 1 \\ \hline P & 1 & 1 \end{array} \quad \text{以及} \quad \begin{array}{c|cc} X-Y & 0 & 0 \\ \hline P & 1 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} U-V & -1 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

528 【答案】 D

【分析】 显然这是一道计算性选择题, 需要通过计算才能确定正确选项. 由题设知 (X,Y) 的概率密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 < x < 1, -1 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

选项(C)、(D)易于计算, 且 $P\{\min(X,Y) \geq 0\} = P\{X \geq 0,$

$$Y \geq 0\} = \iint_{\substack{x \geq 0 \\ y \geq 0}} f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{4} dy = \frac{1}{4}, \text{选择(D).}$$

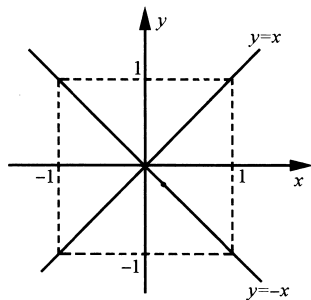
又 $P\{\max(X,Y) \geq 0\} = 1 - P\{\max(X,Y) < 0\} = 1 - P\{X < 0, Y < 0\}$

$$= 1 - \int_{-1}^0 dx \int_{-1}^0 \frac{1}{4} dy = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} P\{X+Y \geq 0\} &= \iint_{x+y \geq 0} f(x,y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{-x}^1 \frac{1}{4} dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1+x) dx = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{X-Y \geq 0\} &= \iint_{x-y \geq 0} f(x,y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^x \frac{1}{4} dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (x+1) dx = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以选项(A)(B)(C)都不正确.



【评注】 如果将已知条件改为: (X, Y) 的概率分布为

Y \ X	1	2
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

选项是什么?

由题设不难计算出:

$$P\{\min(X, Y) \geq 0\} = P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = P\{X=1, Y=1\} + P\{X=1, Y=2\} = \frac{1}{4}.$$

$$P\{\max(X, Y) \geq 0\} = 1 - P\{\max(X, Y) < 0\} = 1 - P\{X < 0, Y < 0\} = 1.$$

$$P\{X+Y \geq 0\} = P\{X=-1, Y=1\} + P\{X=-1, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\} + P\{X=1, Y=2\} = 1.$$

$$P\{X-Y \geq 0\} = P\{X \geq Y\} = P\{X=1, Y=1\} = 0.$$

选项(D)正确,其他选项均不正确.

529 【答案】 A

【分析】 $X \sim B(1, \frac{1}{2})$, X 的取值只能是 $X=0$ 或 $X=1$, 将 $X=0$ 和 $X=1$ 看成完备事件组, 用全概率公式有

$$\begin{aligned} P\{X+Y \leq \frac{1}{3}\} &= P\{X=0\}P\{X+Y \leq \frac{1}{3} | X=0\} + P\{X=1\}P\{X+Y \leq \frac{1}{3} | X=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq \frac{1}{3} | X=0\} + \frac{1}{2}P\{1+Y \leq \frac{1}{3} | X=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq \frac{1}{3}\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq -\frac{2}{3}\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

530 【答案】 B

【分析】 设 (X_1, X_2) 的分布函数为 $F_1(x_1, x_2)$, (Y_1, Y_2) 的分布函数为 $F_2(y_1, y_2)$.

$$\begin{aligned} F_2(y_1, y_2) &= P\{Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2\} = P\{2X_1 \leq y_1, \frac{1}{3}X_2 \leq y_2\} \\ &= P\{X_1 \leq \frac{y_1}{2}, X_2 \leq 3y_2\} = F_1\left(\frac{y_1}{2}, 3y_2\right) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } f_2(y_1, y_2) = \frac{3}{2}f_1\left(\frac{y_1}{2}, 3y_2\right).$$

531 【答案】 B

【分析】 (X, Y) 服从二维正态分布, 则 $(X+Y, X-Y)$ 也服从二维正态分布, 故两个边缘分布 $X+Y$ 和 $X-Y$ 的分布也是正态分布.

$$E(X+Y) = EX + EY = 0 + 0 = 0,$$

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y) = \sigma^2 + \sigma^2 + 2\rho \sqrt{DX} \sqrt{DY} = 2\sigma^2(1+\rho).$$



$$E(X-Y) = EX - EY = 0 - 0 = 0.$$

$$D(X-Y) = DX + DY - 2\text{Cov}(X, Y) = \sigma^2 + \sigma^2 - 2\rho \sqrt{DX} \sqrt{DY} = 2\sigma^2(1-\rho).$$

所以 $(X+Y) \sim N(0, 2\sigma^2(1+\rho))$, $(X-Y) \sim N(0, 2\sigma^2(1-\rho))$

$X+Y$ 与 $X-Y$ 不同分布.

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X+Y, X-Y) &= \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y) \\ &= \sigma^2 - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Y) - \sigma^2 = 0\end{aligned}$$

故 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数为 0, $(X+Y, X-Y)$ 服从二维正态分布, 所以 $X+Y$ 与 $X-Y$ 相互独立.

【评注】 (X, Y) 服从二维正态分布, 则 $(aX+bY, cX+dY)$ 当 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 时, 也服从二维正态分布, 其边缘分布 $aX+bY$ 与 $cX+dY$ 的分布也是正态分布.

(X, Y) 服从二维正态分布时, X 与 Y 相互独立等价于 $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

随机变量的数字特征

A 组

532 【答案】 D

【分析】 $E[X(X+Y-2)] = E(X^2 + XY - 2X) = E(X^2) + E(XY) - E(2X)$
 $= DX + (EX)^2 + EX \cdot EY - 2EX = 3 + 4 + 2 - 4 = 5.$

533 【答案】 B

【分析】 当(B)成立时, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x+a)dx = 0.$

令 $x+a=t,$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x+a)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt - a \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\ &= E(X) - a = 0\end{aligned}$$

即 $E(X) = a.$

534 【答案】 D

【分析】 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 2,$ 令 $t = \frac{x}{2},$ 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2tf(2t)d(2t) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} tf(2t)dt = 2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(2x)dx = \frac{1}{2}.$$

即

535 【答案】 A

【分析】 $D(X^2) = E(X^4) - (EX^2)^2.$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2!,$$



$$EX^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} x^4 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = 4!,$$

$$D(X^2) = 4! - (2!)^2 = 24 - 4 = 20.$$

【评注】 利用 $f(x)$ 是偶函数, 具有对称性, 可以简化计算. 记住公式 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.

536 【答案】 B

【分析】 直接计算 Y 与 Z 的相关系数 ρ_{ZY} 来确定正确选项. 由于

$$\text{Cov}(Y, Z) = \text{Cov}(Y, aX + b) = a\text{Cov}(X, Y), DZ = D(aX + b) = a^2 DX,$$

$$\rho_{ZY} = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\sqrt{DY} \sqrt{DZ}} = \frac{a\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DY} \sqrt{a^2 DX}} = \frac{a}{|a|} \rho_{XY}, \rho_{ZY} = \rho_{XY} \text{ 就有 } \frac{a}{|a|} = 1, \text{ 即 } a > 0. \text{ 选择(B).}$$

537 【答案】 D

【分析】 直接用定义通过计算确定正确选项, 已知 $DX = DY$, 故

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Cov}(X, X)} = 1,$$

即 $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, X)$, 所以 $\text{Cov}(X, X - Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) = 0$, 即 $\text{Cov}(X - Y, X) = 0$, 选择(D).

其余选项均不正确, 这是因为当 $DX = DY$ 时必有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X + Y, X - Y) &= \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y) \\ &= DX - DY = 0, \end{aligned}$$

选项(C) 成立, 不能推出 $\rho = 1$. 选项(A)(B) 可推出

$$\text{Cov}(X, Y) = -\text{Cov}(X, X) = -DX \text{ 或 } \text{Cov}(X, Y) = -\text{Cov}(Y, Y) = -DY,$$

由此得

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{-DX}{DX} = -1.$$

538 【答案】 D

【分析】 应用公式 $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2\text{Cov}(X, Y)$ 确定正确选项.

由于 X 与 Y 的相关系数 $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$, 故 $\rho > 0$ 就是 $\text{Cov}(X, Y) > 0$. 所以

$$D(X + Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y) > DX + DY.$$

$$D(X - Y) = DX + DY - 2\text{Cov}(X, Y) < DX + DY.$$

选择(D).

539 【答案】 A

【分析】 直接通过计算协方差来判断.

已知 X 与 Y 独立, 故 $\text{Cov}(X, Y) = 0$,

$$\text{Cov}(X, X + Y) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) = DX > 0.$$

所以 X 与 $X + Y$ 一定相关, 选择(A).

又由于



$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, XY) &= E(X^2Y) - EX \cdot E(XY) = EX^2 \cdot EY - (EX)^2 \cdot EY \\ &= [EX^2 - (EX)^2]EY = DXEY \begin{cases} = 0, & EY = 0 \\ \neq 0, & EY \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

故选项(C)(D)有时成立,有时不成立.

【评注】 如果将选项中的“相关”改为“独立”,“不相关”改为“不独立”,那么正确选项应该是()

由原题计算知 X 与 $X+Y$ 一定相关,从而推知 X 与 $X+Y$ 一定不独立,选择(B).

540 【答案】 B

【分析】 根据分布函数的充要条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. 所以,常数 b 必不可能小于 0, b 也不可能为 0, 因为 $b = 0$ 就不可能有 $D(X) = 4$.

由此得到 $a = 1, b > 0$.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 即有 } f(x) = F'(x) = \begin{cases} be^{-bx}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

因此 $X \sim E(\lambda), DX = \frac{1}{\lambda^2} = 4$, 即 $\lambda = \frac{1}{2}$, 也就有 $b = \frac{1}{2}$.

答案应选(B).

541 【答案】 D

【分析】 由于 X 与 Y 相互独立, 故 e^X 与 $2Y+1$ 相互独立, 选择(D).

事实上, 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned}P\{e^X \leq x, 2Y+1 \leq y\} &= P\left\{X \leq \ln x, Y \leq \frac{y-1}{2}\right\} \\ &= P\{X \leq \ln x\} \cdot P\left\{Y \leq \frac{y-1}{2}\right\} = P\{e^X \leq x\} \cdot P\{2Y+1 \leq y\}.\end{aligned}$$

而当 $x \leq 0$ 时, $P\{e^X \leq x\} = 0$,

所以 $P\{e^X \leq x, 2Y+1 \leq y\} = 0 = P\{e^X \leq x\} \cdot P\{2Y+1 \leq y\}$, 由此可知 e^X 与 $2Y+1$ 相互独立.

选项(A)(B)(C)不成立, 是由于 $\text{Cov}(3X+1, 4Y-2) = 12\text{Cov}(X, Y) = 0$, 所以 $3X+1$ 与 $4Y-2$ 不相关; $\text{Cov}(X+Y, X-Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(Y, Y) = DX - DY \neq 0$ 得出 $X+Y$ 与 $X-Y$ 并非不相关; $\text{Cov}(X+Y, 2Y+1) = 2\text{Cov}(X, Y) + 2\text{Cov}(Y, Y) = 2DY \neq 0$ 得出 $X+Y$ 与 $2Y+1$ 并非不相关, 也就有 $X+Y$ 与 $2Y+1$ 不相互独立.

542 【答案】 A

【分析】 X_1 的分布律有对称性, 所以 $EX_1 = n+1$.

$$\begin{aligned}D(X_1) &= E[X_1 - (n+1)]^2 \\ &= [n - (n+1)]^2 \cdot 0.3 + [(n+1) - (n+1)]^2 \cdot 0.4 + [(n+2) - (n+1)]^2 \cdot 0.3 \\ &= 0.3 + 0 + 0.3 = 0.6\end{aligned}$$

答案选(A).



543 【答案】 A

【分析】 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}, X+Y=2.$

X, Y 均服从 $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 分布, $EX = EY = 1, DX = DY = \frac{1}{2}.$

XY 的分布为

XY	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(XY) = \frac{1}{2}$

总之, $\rho_{XY} = \frac{\frac{1}{2} - 1 \cdot 1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}}} = -1.$ 答案选(A).

【评注】 本题也可以更简单解为 $X+Y=2, Y=2-X.$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\text{Cov}(X, 2-X)}{\sqrt{DX} \sqrt{D(2-X)}} = \frac{\text{Cov}(X, 2) - \text{Cov}(X, X)}{DX} = \frac{-DX}{DX} = -1.$$

如果对相关系数性质了解, 由 $Y=2-X$ 可以直接得出 $\rho_{XY} = -1.$

B 组**544 【答案】 C**

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } E(X)E\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda} \end{aligned}$$

答案选(C).

545 【答案】 D

【分析】 由于 $DX = EX^2 - (EX)^2 \geq 0$, 故 $EX^2 \geq (EX)^2$, 选择(D). 选项(A)(B)对某些随机变量可能成立, 对某些随机变量可能不成立. 例如, 随机变量 X 在区间 $[0, 1]$ 上服从均匀分布, 则 $EX = \frac{1}{2}, DX = \frac{1}{12}, EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = EX$, 选项(A)成立. 此时(B)不成立. 又如 $X \sim N(\mu, \sigma^2), EX = \mu, DX = \sigma^2, EX^2 = \sigma^2 + \mu^2$, 取 $\sigma \geq \mu = \frac{1}{2}$, 则 $EX^2 \geq 2\mu^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = EX$, 即选项(B)成立. 此时(A)不成立.

546 【答案】 C

【分析】 由于 $DX = D(X-c) = E(X-c)^2 - [E(X-c)]^2$, 所以 $E(X-c)^2 = DX + [E(X-c)]^2$,



选择(C).

或者是, 由于

$$E(X-c)^2 = E(X^2 - 2cX + c^2) = E(X^2) - 2cEX + c^2,$$

$$[E(X-c)]^2 = (EX-c)^2 = (EX)^2 - 2cEX + c^2,$$

$$\text{故 } E(X-c)^2 - [E(X-c)]^2 = E(X^2) - (EX)^2 = DX, E(X-c)^2 = DX + [E(X-c)]^2$$

选择(C).

547 【答案】 C

【分析】 $F(x) = 0.4\Phi\left(\frac{x-5}{2}\right) + 0.6\Phi\left(\frac{x+1}{3}\right)$, 故

$$f(x) = F'(x) = 0.4\varphi\left(\frac{x-5}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + 0.6\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 0.2\varphi\left(\frac{x-5}{2}\right) + 0.2\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right),$$

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0.2x\varphi\left(\frac{x-5}{2}\right)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 0.2x\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right)dx$$

$$= 0.4 \int_{-\infty}^{+\infty} (2t+5)\varphi(t)dt + 0.6 \int_{-\infty}^{+\infty} (3t-1)\varphi(t)dt$$

$$= 0.4 \cdot 5 + 0.6 \cdot (-1) = 2.0 - 0.6 = 1.4.$$

答案应选(C).

【评注】 当随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时, $(\sigma > 0)$, 其分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$E(X) = \mu.$$

所以, 当 X 的分布函数为 $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 时, $E(X) = \mu$.

进一步推广: 当 $F(x) = c_1\Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) + c_2\Phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)$ 时, $c_1 + c_2 = 1$, 则必有

$$E(X) = c_1\mu_1 + c_2\mu_2.$$

本题 $F(x) = 0.4\Phi\left(\frac{x-5}{2}\right) + 0.6\Phi\left(\frac{x+1}{3}\right)$, 则

$$E(X) = 0.4 \cdot 5 + 0.6 \cdot (-1) = 1.4.$$

548 【答案】 C

$$\text{【分析】 } E[(X-2)^2 e^{2X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 e^{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx = e^2,$$

所以选择(C). 上式最后一步是因为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$ 是正态 $N(2, 1)$ 的概率密度,

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx$ 恰是它的方差, 等于 1.



549 【答案】 C

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } D(XY) &= E(XY)^2 - (EXY)^2 \\
 &= E(X^2Y^2) - (EXEY)^2 \\
 &= EX^2 \cdot EY^2 - (1 \cdot 1)^2 \\
 &= [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - 1 \\
 &= (2 + 1^2)(2 + 1^2) - 1 \\
 &= 8.
 \end{aligned}$$

故应选(C).

550 【答案】 D

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} &= \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} \\
 &= \text{Cov}(X_1, X_1)\text{Cov}(X_2, X_2) - \text{Cov}(X_1, X_2)\text{Cov}(X_2, X_1) \\
 &= DX_1DX_2 - [\text{Cov}(X_1, X_2)]^2 = 0 \\
 \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = 0 &\text{等价于} \left[\frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}} \right]^2 = \rho^2 = 1, \text{即} |\rho| = 1, \text{选择(D)}.
 \end{aligned}$$

551 【答案】 D

$$\text{【分析】 } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \left(1 \cdot \frac{1}{12} + 0 \cdot \frac{11}{12}\right) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0,$$

所以 $\rho = 0$, (A)(B) 不成立.

$$P\{X = 1, Y = 1\} = P\{XY = 1\} = \frac{1}{12} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\};$$

$$\begin{aligned}
 P\{X = 0, Y = 1\} &= P\{Y = 1\} - P\{X = 1, Y = 1\} \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} = P\{X = 0\}P\{Y = 1\};
 \end{aligned}$$

同理可以证明 $P\{X = 1, Y = 0\} = P\{X = 1\}P\{Y = 0\}$

$$P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0\}P\{Y = 0\}$$

总之 X, Y 相互独立.

【评注】 对 $X \sim B(1, p_1), Y \sim B(1, p_2)$ 的两随机变量的独立性, 应该验证

$$\begin{cases} P\{X = 1, Y = 1\} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\}; \\ P\{X = 0, Y = 1\} = P\{X = 0\}P\{Y = 1\}; \\ P\{X = 1, Y = 0\} = P\{X = 1\}P\{Y = 0\}; \\ P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0\}P\{Y = 0\}. \end{cases}$$

但实际上只要验证以上四个等式中一个成立, 其他三个等式就一定成立.

例如 $P\{X = 1, Y = 1\} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\}$ 成立,

$$\begin{aligned}
 P\{X = 0, Y = 1\} &= P\{Y = 1\} - P\{X = 1, Y = 1\} = P\{Y = 1\} - P\{X = 1\}P\{Y = 1\} \\
 &= P\{Y = 1\}[1 - P\{X = 1\}] = P\{X = 0\}P\{Y = 1\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{X = 0, Y = 0\} &= P\{X = 0\} - P\{X = 0, Y = 1\} = P\{X = 0\} - P\{X = 0\}P\{Y = 1\} \\
 &= P\{X = 0\}[1 - P\{Y = 1\}] = P\{X = 0\}P\{Y = 0\}.
 \end{aligned}$$



552 【答案】 D

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } E(X-c)^2 &= E[(X-\mu) + (\mu-c)]^2 \\
 &= E[(X-\mu)^2 + 2(X-\mu)(\mu-c) + (\mu-c)^2] \\
 &= E(X-\mu)^2 + 2(\mu-c)E(X-\mu) + E(\mu-c)^2 \\
 &= E(X-\mu)^2 + 2(\mu-c) \cdot 0 + E(\mu-c)^2 \\
 &\geq E(X-\mu)^2
 \end{aligned}$$

答案应选(D).

大数定律和中心极限定理

A 组

553 【答案】 B

【分析】 显然, $EX = 1, DX = 1$.

$$\begin{aligned}
 P\{X \geq 3\} &= P\{X-1 \geq 2\} = P\{|X-1| \geq 2\} - P\{X-1 \leq -2\} \\
 &= P\{|X-1| \geq 2\} + 0 = P\{|X-EX| \geq 2\} \leq \frac{DX}{2^2} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

答案应选(B).

【评注】 如果直接计算 $P\{X \geq 3\}$, 就有 $P\{X \geq 3\} = \int_3^{+\infty} f(x)dx = e^{-3}$. 比用切比雪夫不等式的估计要更精确, 但切比雪夫不等式不用涉及 X 的分布, 较简单.

554 【答案】 C

【分析】 直接应用辛钦大数定律的条件进行判断, 选择(C). 事实上, 应用辛钦大数定律, 随机变量序列 $X_1, \dots, X_n, \dots$ 必须是: “独立同分布且数学期望存在”, 选项(A) 缺少同分布条件, 选项(B)(D) 虽然服从同一分布但不能保证期望存在. 因此选择(C).

555 【答案】 D

【分析】 切比雪夫大数定律为: $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 两两不相关, 存在常数 c , 使 $D(X_i) \leq c$, ($i = 1, 2, \dots$), 则对任意 $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \epsilon\right\} = 1$$

现 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 两两独立推出不相关, 但从(A), (B), (C) 得不出 $D(X_i) \leq c$, 甚至 $D(X_i)$ 可能不存在.

当(D) 成立时, $D(X_{2i}) = \lambda_2, D(X_{2i-1}) = \lambda_1$, 显然 $D(X_i) \leq \lambda_1 + \lambda_2 = c$. 答案选(D).

556 【答案】 C

【分析】 由题设知 $X_n \sim B(n, \frac{1}{2})$, 根据“二项分布以正态分布为其极限分布”定理得:



$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{X_n - \frac{1}{2}n}{\sqrt{\frac{1}{4}n}} \leq x \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x). \text{ 选择(C).}$$

数理统计的基本概念

A 组

557 【答案】 B

【分析】 由于 $X_i \sim N(\mu, 1), i = 1, 2, \dots, n$ 相互独立.

$$(X_n - X_1) \sim N(0, 2), \quad \frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1), \quad \frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1).$$

显然, $2(X_n - X_1)^2$ 并不服从 χ^2 分布, 答案应选(B).

558 【答案】 A

【分析】 由题设知, $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sigma} \sim N(0, 1)$,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 独立, 所以 } \frac{\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/n-1}} = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \sim t(n-1).$$

选择(A).

559 【答案】 C

【分析】 由题设知, $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 且相互独立, $i = 1, 2, \dots, 11$.

由 χ^2 分布, t 分布, F 分布的典型模式知, $\frac{X_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, 所以, (A) 不成立.

$$\frac{10Y^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^{11} \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(10), \text{ 所以, (B) 不成立.}$$

$$\frac{\frac{X_1}{\sigma}}{\sqrt{\frac{10Y^2}{\sigma^2}/10}} = \frac{X_1}{Y} \sim t(10), \text{ 故(C) 成立.}$$

$$\text{而 } \frac{\frac{X_1^2}{\sigma^2}/1}{\frac{10Y^2}{\sigma^2}/10} = \frac{X_1^2}{Y^2} \sim F(1, 10), \text{ (D) 不成立. 所以选择(C).}$$

560 【答案】 C

【分析】 由题设得 $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, $\bar{X}$



与 S^2 相互独立, 所以 $\frac{\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2}/1}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)} = \frac{n\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$. 选择(C).

561 【答案】 B

【分析】 因为 $X \sim F(n, n)$, 所以 $\frac{1}{X} \sim F(n, n)$, 即 X 与 $\frac{1}{X}$ 具有相同的分布, 因此有

$$p_1 = P\{X \geq 1\} = P\left\{\frac{1}{X} \leq 1\right\} = P\{X \leq 1\} = p_2$$

选择(B).

562 【答案】 D

【分析】 $\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, $\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 且它们相互独立, 所以

$$\begin{aligned} DT &= \sigma^4 D\left[\frac{n-1}{\sigma^2}(S_X^2 + S_Y^2)\right] = \sigma^4 \left[D\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S_X^2\right) + D\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S_Y^2\right)\right] \\ &= \sigma^4 [2(n-1) + 2(n-1)] = 4(n-1)\sigma^4. \end{aligned}$$

B 组

563 【答案】 D

【分析】 通过计算协方差来确定正确选项. 由于 X_i 相互独立, 故

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) = D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}) &= \text{Cov}(X_1, X_2) - \text{Cov}(X_1, \bar{X}) - \text{Cov}(\bar{X}, X_2) + \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_1, X_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, X_2) + D\bar{X} \\ &= -\frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} \neq 0. \end{aligned}$$

所以 $X_1 - \bar{X}$ 与 $X_2 - \bar{X}$ 相关. 因此 $X_1 - \bar{X}$ 与 $X_2 - \bar{X}$ 不独立, 选择(D).

564 【答案】 B

【分析】 $X_1 - X_2$ 和 $X_1 + X_2$ 均服从 $N(0, 2\sigma^2)$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) &= \text{Cov}(X_1, X_1) + \text{Cov}(X_2, X_1) - \text{Cov}(X_1, X_2) - \text{Cov}(X_2, X_2) \\ &= D(X_1) - D(X_2) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0 \end{aligned}$$

所以 $X_1 - X_2$ 与 $X_1 + X_2$ 相互独立且同服从 $N(0, 2\sigma^2)$.

同理 $X_3 - X_4$ 和 $X_3 + X_4$ 也相互独立且均服从 $N(0, 2\sigma^2)$.

显然 $X_1 - X_2, X_1 + X_2, X_3 - X_4, X_3 + X_4$ 相互独立均服从 $N(0, 2\sigma^2)$.

$$Y = \frac{(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2}{(X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2} = \frac{\left[\frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} + \frac{(X_3 - X_4)^2}{2\sigma^2}\right]/2}{\left[\frac{(X_1 + X_2)^2}{2\sigma^2} + \frac{(X_3 + X_4)^2}{2\sigma^2}\right]/2} \sim F(2, 2)$$



答案应选(B).

565 【答案】 D

【分析】 应用 t 分布典型模式来确定正确选项. 由于 $\sum_{i=1}^m X_i \sim N(0, m\sigma^2)$, $U = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sqrt{m}\sigma} \sim N(0, 1)$, 而 $\frac{Y_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 且相互独立, 所以 $V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$, U 与 V 相互独立, 根据 t 分布典型模式知, $\frac{U}{\sqrt{V/n}} = \sqrt{\frac{n}{m}} \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sqrt{Y_1^2 + \cdots + Y_n^2}} \sim t(n)$, 依题设知 $\sqrt{\frac{n}{m}} = 2$, 即 $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$, 选择(D).

566 【答案】 B

【分析】 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, 所以 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 已知 S^2 与 $\bar{X}$ 相互独立, 且 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

根据 t 分布典型模式: $\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$.

答案选(B).

【评注】 本题应该直接背出选(B).

567 【答案】 B

【分析】 由于 $\frac{\bar{X}}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, $\frac{nS_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 且这两个随机变量相互独立, 故

$\frac{\bar{X}/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{nS_2^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{\bar{X}}{S_2/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1)$ 因此选(B). 而 $\frac{\bar{X}}{S_1/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 故(A) 不正确.

(C) 和(D) 也不正确, 因为 S_3 或 S_4 与 $\bar{X}$ 不独立.

568 【答案】 C

【分析】 我们要通过 $P\{|X - \mu| < a\} = P\{|\bar{X} - \mu| < b\}$ 来确定正确选项, 为此需要先求出 $X - \mu$ 与 $\bar{X} - \mu$ 的分布.

依题设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 标准化得 $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$,

由此可知: 如果 $P\{|X - \mu| < a\} = P\{|\bar{X} - \mu| < b\}$, 则有



$$P\left\{\frac{|X-\mu|}{\sigma} < \frac{a}{\sigma}\right\} = P\left\{\frac{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu|}{\sigma} < \frac{\sqrt{nb}}{\sigma}\right\},$$

所以 $\frac{a}{\sigma} = \frac{\sqrt{nb}}{\sigma}$, 即 $\frac{a}{b} = \sqrt{n}$, 比值 $\frac{a}{b}$ 与 σ 无关, 与 n 有关, 选择(C).

569 【答案】 B

【分析】 应用已知性质 $E\bar{X}^2 = D\bar{X} + (E\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + 0 = \frac{\sigma^2}{n}$, $ES^2 = D(X) = \sigma^2$, 即可计算得正确选项.

由于 $ET_k = \frac{n}{k}E\bar{X}^2 + \frac{1}{k}ES^2 = \frac{n}{k} \cdot \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{k}\sigma^2 = \frac{2}{k}\sigma^2$, 故 $ET_k = \frac{2}{k}\sigma^2 = \sigma^2$, 即 $k = 2$. 选择(B).

570 【答案】 A

【分析】 $E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\left[\sum_{j=1}^n (nX_j - \sum_{k=1}^n X_k)^2\right]\right\} = E[n\bar{X} \cdot n^2(n-1)S^2]$
 $= n^3(n-1)E(\bar{X} \cdot S^2) = n^3(n-1)\mu \cdot \sigma^2.$

因 $\bar{X}, S^2$ 是相互独立的.

571 【答案】 B

【分析】 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y_1 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6}), Y_2 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3}), Y_1 - Y_2 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2})$,

$$\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$$

由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 且 S^2 与 Y_2 相互独立, 当然也和 $Y_1 - Y_2$ 相互独立.

$$\text{现 } n = 3, T = \frac{\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n-1}}} \sim t(n-1)$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} \sim t(2).$$

参数估计

A 组

572 【答案】 D

【分析】 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \theta - 1 \leq x \leq \theta + 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

似然函数为



$$L = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & \theta - 1 \leq X_i \leq \theta + 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 来说, $L = (\frac{1}{2})^n$ 是常数, 只要 θ 满足 $\theta - 1 \leq X_i \leq \theta + 1$, 所以必有 $\theta - 1 \leq \min_{1 \leq i \leq n} X_i$, 同时 $\theta + 1 \geq \max_{1 \leq i \leq n} X_i$, 也就有 $\theta \leq \min_{1 \leq i \leq n} (X_i + 1)$, 同时 $\theta \geq \max_{1 \leq i \leq n} (X_i - 1)$, 总之 $\max_{1 \leq i \leq n} (X_i - 1) \leq \hat{\theta} \leq \min_{1 \leq i \leq n} (X_i + 1)$.

573 【答案】 D

【分析】 由于 $E(X) = (-1) \cdot \theta + 0 \cdot (1 - 2\theta) + 1 \cdot \theta = 0$, 不包含未知参数 θ . 没法用 $EX = \bar{X}$ 来估计 θ .

考虑用二阶矩. $E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 来求解未知参数 θ .

由于 $E(X^2) = (-1)^2 \cdot \theta + 0^2 \cdot (1 - 2\theta) + 1^2 \cdot \theta = 2\theta$.

故 $E(X^2) = 2\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 解得 $\hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

574 【答案】 D

【分析】 根据矩估计量的定义确定选项, 由于 $EX^2 = DX + (EX)^2$, 而 DX 与 EX 的矩估计量分别为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n} S^2$ 与 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 所以 EX^2 的矩估计量为 $\frac{n-1}{n} S^2 + \bar{X}^2$. 选择(D).

【评注】 $\frac{n-1}{n} S^2 + \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 按定义, 此即为 EX^2 的矩估计量.

B 组

575 【答案】 B

【分析】 似然函数 $L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma}}$,

$$\ln L = -n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma},$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0 - \frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma^2} = 0, \text{ 解得 } \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$$

所以 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$. 答案选(B).



2阶

基础过关



微积分



填空题

函数、极限、连续

A 组

576 【答案】 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + 11, & -2 < x < -1 \\ -x^2 + 3x - 1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = -2, -1, 0 \end{cases}$

【分析】 当 $-2 < x < -1$ 时, $2 < x+4 < 3$, 由周期为 2, 故

$$f(x) = f(x+4) = (x+4)^2 - (x+4) - 1 = x^2 + 7x + 11.$$

当 $-1 < x < 0$ 时, $0 < -x < 1$, $2 < -x+2 < 3$, 由周期为 2 且为奇函数, 故

$$f(x) = -f(-x) = -f(-x+2) = -[(-x+2)^2 - (-x+2) - 1] = -x^2 + 3x - 1.$$

又因 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 在 $x = -1, 0, 1, 2$ 处均有定义, 所以 $f(0) = 0, f(2) = f(0) = 0, f(-1) = -f(1)$, 且 $f(-1) = f(1)$, 从而 $f(-1) = f(1) = 0$. 于是

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + 11, & -2 < x < -1 \\ -x^2 + 3x - 1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = -2, -1, 0 \end{cases}.$$

【评注】 关键是由 $x \in [-2, 0]$ 一步步过渡到 $x \in (2, 3)$, 并且利用周期为 2 以及奇函数的性质, 计算出 $f(0), f(1)$ 等的值.

577 【答案】 $\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

【分析】 $f[f(x)] = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$

578 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【分析】 由洛必达法则,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - \ln(x+1)}{2x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

579 【答案】 $\frac{1}{6}$

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (x - \sin x)}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$



A 组

580 【答案】 0

$$\text{【分析】} \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) \sin \frac{1}{x}}{x} \quad (\Delta)$$

因 $h(0) = 0, h'(0) = 0$, 由佩亚诺余项泰勒公式, 有

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + o(x) = o(x)$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$, 代入 (Δ) 中,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x) \sin \frac{1}{x}}{x} = 0$$

这是因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{o(x)}{x}$ 为无穷小量, $\sin \frac{1}{x}$ 有界.

【评注】 因未设 $x \in \dot{U}_\delta(0)$ 时 $h(x)$ 可导, 所以不能用洛必达法则. 本题也可以不用佩亚诺余项泰勒公式, 而改用如下办法, 实质是一样的.

$$0 = h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x}$$

所以 (Δ) 中 $\frac{h(x)}{x}$ 为无穷小(当 $x \rightarrow 0$), 从而 $f'(0) = 0$.

 581 【答案】 $(-1)^n n! \left[\frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$

$$\text{【分析】} \quad y = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{1}{x+3} \right)^{(n)} + \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

582 【答案】 2

【分析】 应先写出 $f(x)$ 的分段表达式:

当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = x$; 当 $x = 1$ 时, $f(x) = 1$; 当 $x = -1$ 时, $f(x) = -1$; 当 $|x| > 1$ 时,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1}(1+x^{-2n+2})}{x^{2n}(1+x^{-2n})} = \frac{1}{x}$$

读者不妨自己画出 $f(x)$ 的图像可知, 在 $x = \pm 1$ 处 $f(x)$ 不可导.

【评注】 由极限式定义的函数要讨论其性质, 应分两步走.



583 【答案】 12

【分析】 $f'(x) = 2x + \frac{16}{x^2}$, 解方程 $f'(x) = 0$ 得函数 $f(x) = x^2 - \frac{16}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的驻点为 $x = -2$.

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x) = x^2 - \frac{16}{x}$ 单调减少;

当 $x \in (-2, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x) = x^2 - \frac{16}{x}$ 单调增加.

所以 $x = -2$ 为函数 $f(x) = x^2 - \frac{16}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的最小值点, 最小值为 $f(-2) = 12$.

一元函数积分学

A 组

584 【答案】 1

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt[3]{x}} f(t) dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}}}{kx^{k-1}}.$

因为当 $x \rightarrow 0$ 时, 连续函数 $f(x)$ 为 2 阶无穷小, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}} = C,$

其中 C 为非零常数, 当 $k = 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt[3]{x}} f(t) dt}{x^k} = C_1$, 其中 C_1 为非零常数.

585 【答案】 3

【分析】 因为 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt$, 所以当 $x = 0$ 时, $y = 1$. 方程

$$x = \int_1^{y(x)-x} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt$$

两边同时对 x 求导, 得

$$1 = \sin^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]\left(\frac{dy}{dx} - 1\right),$$

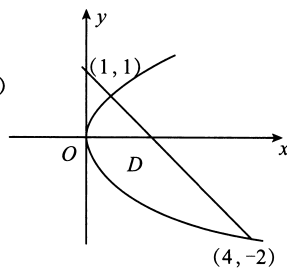
由 $x = 0, y = 1$, 故 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = 3$.

586 【答案】 $\frac{9}{2}, \frac{72\pi}{5}$

【分析】 区域 D 如右图. $y^2 = x$ 与 $x + y = 2$ 的交点是 $(4, -2)$ 与 $(1, 1)$.

D 的面积

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 [(2-y) - y^2] dy \\ &= -\frac{1}{2}(2-y)^2 \bigg|_{-2}^1 - \frac{1}{3}y^3 \bigg|_{-2}^1 \end{aligned}$$



$$= \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}$$

D 绕 y 轴旋转形成的旋转体体积为两个旋转体体积之差

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^1 \pi(2-y)^2 dy - \int_{-2}^1 \pi y^4 dy \\ &= \frac{\pi}{3} (y-2)^3 \Big|_{-2}^1 - \frac{\pi}{5} y^5 \Big|_{-2}^1 = 21\pi - \frac{33\pi}{5} = \frac{72\pi}{5}. \end{aligned}$$

587 【答案】 $\frac{1}{100}$

【分析】 $w(9) - w(4) = \int_4^9 w'(x) dx = \int_4^9 \frac{1}{200\sqrt{x}} dx$
 $= \frac{1}{200} \cdot 2\sqrt{x} \Big|_4^9 = \frac{1}{100}.$

588 【答案】 $-\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 11x - 50$

【分析】 $C(x) = C(0) + \int_0^x C'(t) dt$
 $= 50 + \int_0^x (t^2 - 14t + 111) dt$
 $= \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 111x + 50$
 $R(x) = R(0) + \int_0^x R'(t) dt$
 $= \int_0^x (100 - 2t) dt$
 $= 100x - x^2$

$\Rightarrow$ 总利润

$$L(x) = R(x) - C(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 11x - 50.$$

微分方程(差分方程)

A 组

589 【答案】 $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

【分析】 由 $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ 可改写成 $\left(\frac{y}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + y^2}\right) - \frac{dy}{dx} = 0$, 当 $x >$

0 时即

$$\left[\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right] - \frac{dy}{dx} = 0 \text{ (齐次方程)},$$

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 代入上述方程化为可分离变量型的

$$(u + \sqrt{1 + u^2}) - u - x \frac{du}{dx} = 0,$$



分离变量得

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x},$$

积分得

$$\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = \ln x + \ln C,$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx,$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx, \text{ 即 } y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2,$$

由 $y|_{x=1} = 0$ 知 $C = 1$, 则 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2$, 又可改写成 $\sqrt{x^2 + y^2} - y = 1$,

$$\text{因此 } y = \frac{1}{2}(x^2 - 1).$$

【评注】 $x < 0$ 时得同样结果.

590

【答案】 $x^2 = Cy^6 + y^4$, C 为任意常数

【分析】 将方程改写为

$$2(y^4 - 3x^2)dy + ydx^2 = 0,$$

$$\frac{dx^2}{dy} - \frac{6}{y}x^2 = -2y^3,$$

把 x^2 看成 y 的函数, 它是一阶线性微分方程. 两边乘 $\mu(y) = e^{-\int \frac{6}{y} dy} = \frac{1}{y^6}$ 得

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x^2}{y^6}\right) = -\frac{2}{y^3},$$

积分得

$$\frac{x^2}{y^6} = \frac{1}{y^2} + C,$$

通解为

$$x^2 = Cy^6 + y^4, C \text{ 为任意常数.}$$

591

【答案】 $y = \frac{x}{4}\sin 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$, C_1, C_2 是两个任意常数

【分析】 $y'' + 4y = \cos 2x$ 对应的齐次方程的特征方程是 $\lambda^2 + 4 = 0$. 它的两个特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

因此对应的齐次方程的通解为 $Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

又因 $\pm \omega i = \pm 2i$ 是特征方程的根, 所以, 应设非齐次方程的特解为

$$y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x),$$

$$\text{则 } (y^*)' = x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + A\cos 2x + B\sin 2x,$$

$$(y^*)'' = -x(4A\cos 2x + 4B\sin 2x) - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x.$$

将上两式代入方程 $y'' + 4y = \cos 2x$ 得

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \cos 2x,$$

比较系数得 $A = 0, B = \frac{1}{4}$. 因此通解为 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x}{4}\sin 2x$.

【评注】 这是一个二阶常系数线性非齐次方程的求解问题, 容易犯的错误是将非齐次方程的特解设为 $y^* = xA\cos 2x$. 注意, 当二阶方程具有 $y'' + 4y = p\cos 2x$ 或 $y'' + 4y = q\sin 2x$ 或 $y'' + 4y = p\cos 2x + q\sin 2x$ 等形式, 且其中 p, q 是不等于零的常数时, 其特解都应设为 $y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.



B 组

592 【答案】 $C_1 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 - 2$ (C_1, C_2 均为任意常数)

【分析】 $u(\sqrt{x^2 + y^2})$ 是一元函数 $u = u(r)$ 与二元函数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的复合函数, 由复合函数求导法则得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{du}{dr} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \\ \text{同理} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) \\ \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{du}{dr}\end{aligned}$$

于是原方程化为二阶线性常系数微分方程

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + u = r^2$$

即

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + u = r^2$$

通解为

$$u = C_1 \cos r + C_2 \sin r + r^2 - 2$$

因此

$$u(\sqrt{x^2 + y^2}) = C_1 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 - 2.$$

593 【答案】 $C(-5)^t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{36}$, C 为任意常数

【分析】 按照差分方程设解的规则, 可设方程的通解为

$$y_t = C(-5)^t + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$$

其中 C 为任意常数, α, β 与 γ 为待定常数, 于是

$$y_{t+1} = -5C(-5)^t + \alpha(t+1)^2 + \beta(t+1) + \gamma$$

代入差分方程可得

$$y_{t+1} + 5y_t = 6(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) + \alpha(2t+1) + \beta \stackrel{\text{令}}{=} 3t^2 - t$$

于是有 $6\alpha = 3, 6\beta + 2\alpha = -1, 6\gamma + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{3}, \gamma = -\frac{1}{36}$.

故差分方程的通解为 $y_t = C(-5)^t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{36}$, 其中 C 是任意常数.

594 【答案】 $W_t = 1.3W_{t-1} + 4$ ($t = 1, 2, \dots$)

【分析】 由题设知第 t 年的研发新品费用总额 W_t (百万元) 是两项之和, 其一是每年固定的追加 4 (百万元), 另一是比前一年的研发费用总额 W_{t-1} 多 30%, 即是 W_{t-1} 的 1.3 倍. 把两者相加即得 W_t 满足的差分方程是 $W_t = 1.3W_{t-1} + 4$.

也可以写成 $W_{t+1} - 1.3W_t = 4$ ($t = 0, 1, 2, \dots$).



595 【答案】 $a = 240000 \left(1 - \frac{1}{1.05^{20}} \right)$

【分析】 设初始存入 a 元, 第一年年末取完钱剩余 x_1 , 第二年年末取完钱剩余 $x_2, \dots$, 第 n 年年末取完钱剩余 x_n , 按题意, 应该有 $x_{20} = 0$.

另一方面, 注意到 $x_{n+1} = 1.05x_n - 12000$, 这是一个差分方程, 其通解为

$$x_n = C \cdot 1.05^n + 240000.$$

由于 $x_1 = 1.05a - 12000$, 故常数 $C = a - 240000$, 所以

$$x_n = (a - 240000) \cdot 1.05^n + 240000.$$

令 $x_{20} = (a - 240000) \cdot 1.05^{20} + 240000 = 0$, 得到 $a = 240000 \left(1 - \frac{1}{1.05^{20}} \right)$.

无穷级数

A 组

596 【答案】 ③

【分析】 要分别考察每个级数的敛散性.

对级数 ① 易求它的部分和

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, 即级数 ① 收敛. 或考察它的一般项 $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 即级数 ① 收敛.

对级数 ② 的部分和 S_n 有

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1$, 又 $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{n+1}$ 也满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = 1$, 这表明 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, 级数 ② 也收敛.

对级数 ④ 也有部分和

$$S_n = \left(2 - \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3} \right) + \dots + \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} \right) = 2 - \frac{n+2}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

可见级数 ④ 也收敛. 或同样考察它的一般项 $a_n = \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ 也可知 ④ 收敛.

对级数 ③ 的部分和 S_n 有

$$S_{2n} = 2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

但 $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{n+2}{n+1} \rightarrow 2$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 故级数 ③ 发散. 或考察它的一般项 a_n , 其中 $a_{2n-1} =$

$\frac{n+1}{n}, a_{2n} = -\frac{n+2}{n+1}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在. 于是 ③ 是发散的. 因此应填 ③.



597 【答案】 收敛**【分析】** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 的部分和数列为

$$\begin{aligned} S_n &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+1} - a_1 \end{aligned}$$

由于 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{S_n\}$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛.**598** 【答案】 $\alpha > \frac{3}{2}$ **【分析】** 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 \neq 0$,则原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ 同敛散, 而当且仅当 $\alpha > \frac{3}{2}$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ 才收敛.**599** 【答案】 1**【分析】** 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛, 则 $x=1$ 为该幂级数收敛区间的端点,则其收敛半径为 1, 而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛半径也为 1.

【评注】 (1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有相同的收敛半径 R . 由 $-R < x-x_0 < R$ 得 $-R+x_0 < x < R+x_0$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的收敛区间是 $(-R+x_0, R+x_0)$. 因此题中幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛区间是 $(0, 2)$.

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0 \neq 0$ 处条件收敛, 则 $x=x_0$ 不在该幂级数的收敛区间内(幂级数在收敛区间内绝对收敛). $x=x_0$ 也不能在收敛区间外部(不含端点), 在这些点幂级数必发散. 因此 $x=x_0$ 必是收敛区间的端点. 该幂级数的收敛半径是 $|x_0|$, 收敛区间是 $(-|x_0|, |x_0|)$. 此时 $x=-x_0$ 时该幂级数的敛散性还不能确定, 所以不能确定该幂级数的收敛域.

600 【答案】 $[-1, 1)$ **【分析】** 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2(n+1)+1} = 1$, 则 $R=1$.当 $x=-1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛.

当 $x = 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ 发散.

则收敛域为 $[-1, 1)$.

601 【答案】 $(0, 2]$

【分析】 利用阿贝尔定理, 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x = 2$ 处收敛, 则该幂级数在 $|x-1| < |2-1| = 1$ 处收敛.

由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x = 0$ 处发散, 则该幂级数在 $|x-1| > |0-1| = 1$ 处发散. 故该幂级数的收敛域为 $(0, 2]$.

602 【答案】 $\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} \right] x^n \quad (-1 < x < 1)$

【分析】 用分解法转化为用公式 $\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n \quad (|ax| < 1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x+1) - (x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} \right] x^n \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

【评注】 必须写出幂级数展开式成立的区间, 在本题中是开区间 $(-1, 1)$.

603 【答案】 $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n} - 1 \right] x^n \quad \left(-\frac{2}{3} < x \leq \frac{2}{3} \right)$

【分析】 用分解法转化为用公式

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} \quad (-1 < t \leq 1)$$

求 $\ln(a+bx)$ 的展开式.

由 $2+x-3x^2 = (1-x)(2+3x)$ 得

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln[(1-x)(2+3x)] = \ln(1-x) + \ln(2+3x) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{3}{2}x\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n} \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$



$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n} - 1 \right] x^n \quad \left(-\frac{2}{3} < x \leq \frac{2}{3} \right).$$

【评注】(1) 必须记住五个基本初等函数的麦克劳林展开式:

$$\textcircled{1} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.$$

$$\textcircled{2} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.$$

$$\textcircled{3} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.$$

$$\textcircled{4} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \leq 1.$$

$$\textcircled{5} (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + \cdots, -1 < x < 1.$$

(2) 用 $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} (-1 < t \leq 1)$ 可求得 $\ln(a+bx)$ 按 $(x-x_0)$ 的展开式:

$$\ln(a+bx) = \ln[a+bx_0 + b(x-x_0)] = \ln a_1 + \ln \left[1 + \frac{b}{a_1} (x-x_0) \right], \text{ 其中 } a_1 = a+bx_0 > 0, \text{ 令 } t = \frac{b}{a_1} (x-x_0) \text{ 即可得到.}$$

604 【答案】 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(n+1)}}{(2n+1)(2n+2)}, x \in [-1, 1]$

【分析】 设 $g(x) = \arctan x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, x \in (-1, 1)$.

于是 $\arctan x = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t) dt$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

在 $x = \pm 1$ 处级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛, 又函数 $\arctan x$ 在 $x = \pm 1$ 处连续, 所以

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots (-1 \leq x \leq 1).$$

由 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} (-1 < x \leq 1)$ 得 $\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}$

$(-1 < x^2 \leq 1, \text{ 即 } -1 \leq x \leq 1)$, 故

$$f(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2(n+1)}$$



$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

【评注】 为了求反三角函数或对数函数的幂级数展开式,一般先求它们的导函数的展开式,然后进行逐项积分;逐项积分时要注意不能忘记积分常数.

605 【答案】 $2e$

【分析】 由于 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, 从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e + e = 2e.$$

B 组

606 【答案】 发散

【分析】 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 由级数性质知, 收敛级数加括号仍收敛, 则级数

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + \cdots$$

收敛, 与题设矛盾.

607 【答案】 2026

【分析】 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 的部分和数列为

$$S_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1 = a_{n+1} - 2025,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - 2025 = 4051 - 2025 = 2026$.

608 【答案】 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

【分析】 令 $x - \frac{1}{2} = t$, 由题设知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 处发散, 在 $t = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ 处收敛, 故其收敛半径 R 同时满足 $R \geq \frac{3}{2}$ 与 $R \leq \frac{3}{2}$, 即 $R = \frac{3}{2}$. 进而可得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛域为 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

令 $t = x - 1$, 代入可得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为 $x-1 \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, 即

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{2}.$$



【评注】 设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 其收敛半径为 R . 若在 $x = x_0$ 或 $-x_0$ 处收敛(发散), 则可知 $R \geq |x_0|$ ($R \leq |x_0|$). 因此若在 $x = x_0$ 与 $-x_0$ 处, 该幂级数一个收敛, 一个发散, 则必有 $R = |x_0|$.

609 【答案】 $4; [-4, 4)$

【分析】 把幂级数中 x^n 项的系数 $\frac{1}{n[4^n + (-3)^n]}$ 记为 a_n , 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n[4^n + (-3)^n]}{(n+1)[4^{n+1} + (-3)^{n+1}]} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1}} = \frac{1}{4}$$

故幂级数的收敛半径 $R = 4$.

当 $x = 4$ 时幂级数成为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n[4^n + (-3)^n]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 由

于 $u_n \sim \frac{1}{n}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n} = 1$, 按正项级数比较判别法的极限形式及调和级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散可知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n + (-3)^n} \cdot \frac{x^n}{n}$ 在点 $x = 4$ 处发散.

当 $x = -4$ 时幂级数成为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n[4^n + (-3)^n]}$, 其一般项可分解为

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n 4^n}{n[4^n + (-3)^n]} &= \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{4^n + (-3)^n - (-3)^n}{4^n + (-3)^n} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{3^n}{n[4^n + (-3)^n]} \\ &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n \left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

由于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 与正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n \left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]}$ 都收敛, 所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n + (-3)^n} \cdot \frac{x^n}{n}$

在点 $x = -4$ 处收敛.

综合即知题设幂级数的收敛域为 $[-4, 4)$.

【评注】 (1) 因为

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n \left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]} \sim \frac{1}{n} \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$



所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n \left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]}$ 收敛.

(2) 本题主要考察求幂级数收敛域的方法. 先求收敛半径 R , 若 $0 < R < +\infty$, 再讨论在收敛区间两端点处幂级数的敛散性.

(3) 判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n [4^n + (-3)^n]}$ 的敛散性时, 常见的错误解法是:

$$\left[\begin{array}{l} \text{因 } \frac{(-1)^n 4^n}{n [4^n + (-3)^n]} = \frac{(-1)^n}{n \left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]} \sim \frac{(-1)^n}{n} (n \rightarrow \infty), \text{ 又 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ 收敛, 所以} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n [4^n + (-3)^n]} \text{ 收敛.} \end{array} \right]$$

因为对于变号级数来说, 若无穷小 $a_n \sim b_n (n \rightarrow \infty)$, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

因此 [] 中的解法是错误的.

610 【答案】 $[-1, 1); \frac{x}{2-x} - \ln(1-x)$

【分析】 分为两个幂级数分别考虑, 分别利用公式

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \quad (-1 < t \leq 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \quad (-1 < t < 1)$$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-x)^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1)$, 收敛域为 $[-1, 1)$.

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2-x} \quad (-2 < x < 2)$, 收敛

域为 $(-2, 2)$.

因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right) x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1)$, 和函数 $S(x) = \frac{x}{2-x} - \ln(1-x)$.

611 【答案】 $(-3, 1)$

【分析】 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+1)^n$ 可由幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 逐项求导和平移得到, 则其收敛半径不变. 故 $R = 2$, 收敛区间为 $(-3, 1)$.

612 【答案】 $(-5, 3]$

【分析】 令 $x+1 = t$, 显然幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n(1-4^n)}$ 的收敛半径



$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n(1-4^n)}}{\frac{1}{(n+1)(1-4^{n+1})}} \right| = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4^n}} = 4,$$

当 $x+1=-4$ 时幂级数变为数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-4)^n}{n(1-4^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(1-4^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(\frac{1}{4^n}-1\right)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}.$$

由于 $\frac{1}{n\left(1-\frac{1}{4^n}\right)} \sim \frac{1}{n}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 可见幂级数在 $x+1=-4$ 即 $x=-5$ 时发散.

当 $x+1=4$ 即 $x=3$ 时幂级数变为数项级数

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n(1-4^n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4^n}{n(4^n-1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4^n-1+1}{n(4^n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(4^n-1)}, \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 条件收敛, 而 $\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n(4^n-1)} \right| = \frac{1}{n(4^n-1)} < \frac{2}{n \cdot 4^n}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n4^n}$ 收

敛. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(4^n-1)}$ 绝对收敛, 综合得幂级数当 $x=3$ 时收敛.

于是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n(1-4^n)}$ 的收敛域是 $(-5, 3]$.

【评注】 本题主要考查求幂级数收敛域的方法. 先求收敛半径 R , 若 $0 < R < +\infty$, 再讨论在收敛区间两端点处幂级数的敛散性.

613 【答案】 $\frac{3}{4}$

【分析】 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 的值就是常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和.

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 记 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $x \in (-1, 1)$.

而 $\int_0^x S_1(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$.

从而

$$S_1(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}.$$



【评注】 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数的一种常用的方法是:利用幂级数的性质,用逐项求导的方法去掉 x^n 项的系数 a_n 的分母中含 n 的因子;或用逐项积分方法去掉 x^n 项的系数 a_n 的分子中含 n 的因子,将幂级数求和化为等比级数求和.

614 【答案】 $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

【分析】 由于 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

615 【答案】 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}], S(x) = \int_0^{\frac{x^2}{2}} \frac{1}{s} \ln(1+s) ds$

【分析】 求

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 2^n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \quad ①$$

及其收敛域,令 $t = \frac{x^2}{2}$, 转化为求

$$f(t) \stackrel{\text{记}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} t^n \quad ②$$

及其收敛域.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1} \\ &= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n \\ &= \frac{1}{t} \ln(1+t) \quad (t \neq 0) \\ f'(0) &= 1. \end{aligned} \quad ③$$

因为逐项求导保持幂级数的收敛半径不变 $\Rightarrow$ ② 与 ③ 有相同的收敛半径 $R=1$. 回到原问题 $\Rightarrow$ ① 有收敛半径 $R=\sqrt{2}$, 且

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s) ds = \int_0^t \frac{1}{s} \ln(1+s) ds$$

于是
$$S(x) = f\left(\frac{x^2}{2}\right) = \int_0^{\frac{x^2}{2}} \frac{1}{s} \ln(1+s) ds, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

在收敛区间端点 $x = \pm\sqrt{2}$, 幂级数 ① 为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 是收敛的, 又 $\int_0^{\frac{x^2}{2}} \frac{1}{s} \ln(1+s) ds$ 在 $x = \pm\sqrt{2}$ 连续, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 2^n} x^{2n} = \int_0^{\frac{x^2}{2}} \frac{1}{s} \ln(1+s) ds, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

收敛域 $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.



【评注】① 利用逐项求导或逐项求积的方法,求幂级数的收敛域与和函数时,往往可以不必先求出收敛半径,而是利用逐项求导与逐项积分保持收敛半径不变的性质,由已知逐项求导或逐项积分后幂级数的收敛半径而求得原幂级数的收敛半径,然后再验证收敛区间端点的敛散性而求得收敛域.

② 这是一个缺项幂级数(即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 中有无穷多项系数为零),对于缺项幂级数来说,不能直接用求收敛半径 R 的公式.(因为此时 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 没有意义).

对这类缺项幂级数求收敛半径常用的方法是:

【方法一】 对每个 x ,把 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 看作数值级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n (u_n = a_n x^n)$,然后用比值判别法.

【方法二】 有些可作变量替换,转化为非缺项的幂级数,然后可用求 R 公式.

方法一 把幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2 2^n} x^{2n} \quad ①$$

表为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$,用比值判别法,当 $x \neq 0$ 时求

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 2^n}{x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 |x|^2}{2(n+1)^2} = \frac{1}{2} |x|^2$$

当 $\frac{|x|^2}{2} < 1$ 即 $|x| < \sqrt{2}$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛,当 $\frac{|x|^2}{2} > 1$ 即 $|x| > \sqrt{2}$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 发散,从而收敛半径 $R = \sqrt{2}$.

方法二 令 $t = x^2$,①可写成 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n n^2} t^n$,令 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n^2}$,由收敛半径公式知,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \text{ 的收敛半径 } R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 2, \text{ 故原幂级数的收敛半径 } R = \sqrt{2}.$$

再看幂级数收敛区间端点 $x = \pm\sqrt{2}$ 处的敛散性,当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$,是收敛的交错级数.

因此原级数的收敛域 $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.



选 择 题

函数、极限、连续

B 组

616 【答案】 A

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } f(1+x) &= f\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right] = \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)} - \left[\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}\right]^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} \\
 &= \frac{1}{2} + \left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = f(x)
 \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是周期为 1 的周期函数.

617 【答案】 C

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \tan \frac{\pi}{2} x &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\cos \frac{\pi}{2} x} \sin \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\cos \frac{\pi}{2} x} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi}{2} x \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\cos \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x} = \frac{4}{\pi}.
 \end{aligned}$$

618 【答案】 D

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 e^{\frac{1}{n}} - \frac{n^3}{n-1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t}{t^2} - \frac{1}{t^2 - t^3} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left(e^t - \frac{1}{1-t} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left[\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2) \right) - (1+t+t^2+o(t^2)) \right] \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

619 【答案】 D

【分析】 (D) 正确. (D) 正是极限的不等式性质中所述的结论.

(A) 的错误在于由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不能判断 x_0 附近 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系. 由 (B)



的条件只能得 $A_0 \geq B_0$. 在(C)中没假设极限存在. 选(D).

620 【答案】 B

【分析】 ① 是一条定理, 正确. ④ 也是正确的, 证明如下: 任给 $M > 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ 时 $f(x) > \frac{1}{2}M$. 同理, 由 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, 故存在 $\eta > 0$, 当 $x \in \dot{U}_\eta(x_0)$ 时, $g(x) > \frac{1}{2}M$. 取 δ 与 η 中的小者, 例如 $\eta \leq \delta$, 则当 $x \in \dot{U}_\eta(x_0)$ 时,

$$f(x) > \frac{1}{2}M, g(x) > \frac{1}{2}M.$$

于是 $f(x) + g(x) > M$. 这就证明了 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$. ④ 正确.

② 看起来似乎是一条定理“无穷小的倒数是无穷大”, 但实际上该定理还要有一条条件“ $f(x) \neq 0$ ”. 例如 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 有 $f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi = 0$, 所以当 $x = \frac{1}{n\pi}$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 无定义, 因此无法讨论 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin(x^{-1})}$. 所以 ② 不正确.

③ 是不正确的, 反例如下: $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = \frac{1+x^2}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1 \neq 0$.

【评注】 本题结论 ①④, 都可当作定理来用. 题中不正确的结论, 要提高警惕, 不要乱用.

621 【答案】 D

【分析】 按 $\{u_n\}$ 无上界的定义, 对于任意给定的 $M > 0$, 相应地总存在 n , 使 $u_n > M$. 如果这样的 n 只有有限个, 取这有限个 u_n 的最大值, 记为 u_* , 则当任意给定的 $M > u_*$ 时, $\{u_n\}$ 中没有一个 u_n 大于 M . 与 $\{u_n\}$ 无上界矛盾. 故(D) 正确. 选(D).

【评注】 (A) 的反例, $\{u_n\}: 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \dots, \{u_n\}$ 无上界. 此 $\{u_n\}$ 的 $\left\{\frac{1}{u_n}\right\}: 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \dots$ 仍无上界.

(B) 的反例: $u_n = 1 + \frac{n}{2}(1 + (-1)^n)$, 有

$$u_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 1+n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$\{u_n\}$ 无上界, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq +\infty$.

(C) 的反例同(B) 的反例 $\{u_n\}, \{u_n\}$ 无上界, 但对于 $M = 2$, 满足 $u_n < M$ 的 n 仍有无限多个(凡 n 为奇数时, $u_n = 1 < 2 = M$).

抓住 $\{u_n\}$ 无上界的实质, 是解决本题的关键.



A 组

622 【答案】 A

【分析】 要使得已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ ax + b, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 在 $[0, 2]$ 上可导, 则其必须在 $x = 1$ 点连续, 故

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b,$$

所以

$$a + b = 0. \quad ①$$

要使得已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ ax + b, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 在 $[0, 2]$ 可导, 则其必须在 $x = 1$ 点可导,

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{a(1 + \Delta x) + b}{\Delta x}.$$

由 ① 知, $a + b = 0$, 故 $f'_+(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{a(1 + \Delta x) + b}{\Delta x} = a$.

由 $f'_-(1) = f'_+(1)$ 可得 $a = 2$, 由 ① 得 $b = -2$, (A) 选项为正确选项.

623 【答案】 D

【分析】 $f(x) = (x - 1)(x + 2) \cdot |x| \cdot |x - 2| \cdot |x + 2| \cdot \sin |x|$,
 $x = 1$ 为函数 $f(x)$ 的可导点, 函数 $f(x)$ 可能的不可导点为 $x = -2, 0, 2$.

在 $x = -2$ 点,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} [(x - 1) \cdot |x| \cdot |x - 2| \cdot |x + 2| \cdot \sin |x|] = 0$$

在 $x = 0$ 点,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 1)(x + 2) \cdot |x| \cdot |x - 2| \cdot |x + 2| \cdot \sin |x|}{x} = 0$$

在 $x = 2$ 点,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)(x + 2) \cdot |x| \cdot |x + 2| \cdot \sin |x| \cdot \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

不存在, 所以函数 $f(x) = (x^2 + x - 2) |x^3 - 4x| \cdot \sin |x|$ 的不可导点为 $x = 2$.

624 【答案】 D

【分析】 由 $f(x + 1) = af(x)$, 有

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{af(\Delta x) - af(0)}{\Delta x} = af'(0) = ab. \text{ 选(D).}$$



625 【答案】 D

【分析】 按(A)(B)(C)(D)次序逐项考察:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{2x}}{x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - 2e^{2x}}{1} = 2 - 2 = 0 = f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 不选(A).

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{2x}}{x^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - 2e^{2x}}{2x}$$

又是“ $\frac{0}{0}$ ”型. 因为 $g(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域二阶导数连续, 可以继续使用洛必达法则, 于是

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - 2e^{2x}}{2x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) - 4e^{2x}}{2} = \frac{1 - 4}{2} = -\frac{3}{2} \quad (\Delta)$$

所以 $f'(0) = -\frac{3}{2}$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 故不选(B). 再看 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处是否连续, 为此, 应先计算出 $f'(x)$ (当 $x \neq 0$).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x(g'(x) - 2e^{2x}) - (g(x) - e^{2x})}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(g'(x) - 2e^{2x}) - (g(x) - e^{2x})}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - 2e^{2x}}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{2x}}{x^2} \\ &= -3 - \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} = f'(0) \end{aligned}$$

所以导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 选(D).

【评注】 其实, 关于 $g(x)$ 的条件给得太强了, 实际上, 只要“设 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处存在二阶导数, 且 $g(0) = 1, g'(0) = 2, g''(0) = 1$ ”, 同样可推得(D)正确. 若条件如此修改之后, 那么式(Δ)中“洛”这一步就不行了(因为洛必达法则的条件(2)不满足), 应改用凑二阶导数的办法. 这点差异, 提醒考生特别注意.

626 【答案】 D

【分析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sqrt{1 - x^2}) = 0$, 由夹逼定理知 $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

又由 $|f(0)| \leq 1 - \sqrt{1 - 0^2} = 0$, 所以 $|f(0)| = 0$, 于是 $f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 不选(A).

再看可导性. 因 $f(x)$ 未给出具体表达式, 只能按定义做. 又因给出的是不等式, 考虑用夹逼定理.

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\sqrt{1 - x^2} - 1)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{1}{2}(-x^2)\right)}{|x|} = 0$$

由夹逼定理, $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, 即 $f'(0)$ 存在且为 0. 选(D).



【评注】 (1) 题中 $f(x)$ 未具体给出, 又未给出极限关系, 给出了一个不等式, 想到用夹逼定理按导数定义去讨论可导性是很自然的事.

(2) 在用夹逼定理时, 多次用到以下事实: “ $|u(0)| = 0$ 的充要条件为 $u(0) = 0$ ”. 但请注意, 只有右边为 0 时才对. 例如由 $|u(0)| = 1$ 推不出 $u(0) = 1$ (因为可能 $u(0) = -1$); 由 $|u(x)| = 1$, 既推不出对一切 $x, u(x) = 1$, 也推不出对一切 $x, u(x) = -1$, 因为可能对某些 $x, u(x) = 1$, 对另一些 $x, u(x) = -1$.

(3) 按定义讨论一点处的可导性, 是重点内容.

627 【答案】 B

【分析】 由于 $f''(0)$ 存在, 故在 $x=0$ 的某邻域 $f'(x)$ 存在, 且在 $x=0$ 处 $f'(x)$ 连续. 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{xf'(x)}$ 为 “ $\frac{0}{0}$ ” 型, 但不能用洛必达法则, 因为用洛必达法则要求在 $x=0$ 的某去心邻域内 $(xf'(x))' = f'(x) + xf''(x)$ 存在, 对于现在这种情形, 应采用凑二阶导数的办法如下:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{xf'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{f'(x)}{x}}$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} &\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0) \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x^2}}{\frac{f'(x)}{x}} = \frac{\frac{1}{2} f''(0)}{f''(0)} = \frac{1}{2}$$

选(B).

【评注】 如果按下述办法做: 由洛必达法则,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{xf'(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{xf''(x) + f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{xf'''(x) + f''(x) + f''(x)} \\ &= \frac{f''(0)}{0 + f''(0) + f''(0)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

读者考虑一下, 哪些地方错了? 条件应添加到什么程度, 上述运算才合理.

628 【答案】 D

【分析】 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f'''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$



A 组

629 【答案】 C

【分析】 逐个考察之. 以(C) 为例.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\gamma(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\ln(1+x)} (e^t - 1) dt}{x^3} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\ln^2(1+x)} - 1) \frac{1}{1+x}}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x)}{x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时 $\gamma(x)$ 与 x^3 为同阶无穷小, (C) 正确. 其中第 2 个等式使用洛必达法则时用到变上限求导定理; 第 3 个等式用到等价无穷小替换: 当 $u \rightarrow 0$ 时 $e^u - 1 \sim u$; 第 4 个等式用到等价无穷小替换, 当 $u \rightarrow 0$ 时, $\ln^2(1+u) \sim u^2$.

【评注】 其他几个选项(A)(B)(D) 考察如下.

(A) 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha(x) = x^3 + x^2 \sim x^2$. 一般, 设 $\alpha(x) = x^m + x^n$, $m > n > 0$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $x^m + x^n \sim x^n$ (方次低的那个, 与方次低的那个等价).

$$(B) \beta(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{1}{2}x, \text{ (当 } x \rightarrow 0, x \neq 0 \text{ 时).}$$

$$(D) \delta(x) = (1 + \sin x)^{\ln(1+x)} - 1 = e^{\ln(1+x)\ln(1+\sin x)} - 1 \sim \ln(1+x)\ln(1+\sin x) \sim x \sin x \sim x^2 \text{ (当 } x \rightarrow 0, x \neq 0 \text{ 时).}$$

630 【答案】 B

$$\text{【分析】 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{kx^{k-1}}, \text{ 欲使上式存在且不为零, 取 } k=1, \text{ 有}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{x} = 1$, 所以当 $x \rightarrow 0^+$ 时 α 与 x 为同阶无穷小.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \cdot 2x}{kx^{k-1}} = \frac{2}{k} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{k-3}}$$

欲使上式存在且不为零, 取 $k=3$. 有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{x^3} = \frac{2}{3}$. 所以当 $x \rightarrow 0^+$ 时, β 与 x^3 为同阶无穷小.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\gamma}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)x^2}{x^k}$$

欲使上式存在且不为零, 取 $k=2$, 有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\gamma}{x^2} = -\frac{1}{2}$. 所以按照排在后面一个是前面一个的高阶无穷小的次序是 α, γ, β , 选(B).



631 【答案】 C**【分析】** 由 $f(x)$ 的一个原函数为 $\arctan x$ 可知

$$\int f(x) dx = \arctan x + C,$$

则

$$\int xf(1-x^2) dx = -\frac{1}{2} \int f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{1}{2} \arctan(1-x^2) + C.$$

故应选(C).

632 【答案】 B**【分析】** 因为 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, 令 $\sin^2 x = t$, 则 $f'(t) = 1 - t$, 所以 $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C$. 故选(B).**633 【答案】 A****【分析】** $\int \frac{f(ax)}{a} dx = \frac{1}{a^2} \int f(ax) d(ax) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\sin ax}{ax} + C.$

故选(A).

634 【答案】 A**【分析】** 令 $t = \arcsin x$, 则 $x = \sin t, dx = \cos t dt, \arccos x = \frac{\pi}{2} - t$,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left(\frac{\pi}{2} - t \right) d(\sin t) \\ &= t \left(\frac{\pi}{2} - t \right) (\sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2t \right) \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2t \right) d(\cos t) = \left(\frac{\pi}{2} - 2t \right) \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = -\frac{\pi}{2} + 2. \end{aligned}$$

635 【答案】 D**【分析】** 作变量替换 $tx = s$, 改写方程为

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds = f(x) + x \sin x \quad (x \neq 0)$$

$$\int_0^x f(s) ds = xf(x) + x^2 \sin x \quad (\forall x) \quad (1)$$

$$f(x) = xf'(x) + f(x) + (x^2 \sin x)' \quad (2)$$

(1) 式与(2) 式是等价的, (2) 式又可改写成

$$f'(x) = -\frac{(x^2 \sin x)'}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= -\int \frac{d(x^2 \sin x)}{x} = -x \sin x + \int x^2 \sin x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= -x \sin x + \cos x + C \quad (\forall x). \end{aligned}$$



A 组

636 【答案】 C【分析】 原方程的特征方程为 $\lambda^2 + q = 0$.当 $q < 0$ 时, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-q}$, 通解为 $y = C_1 e^{\sqrt{-q}x} + C_2 e^{-\sqrt{-q}x}$,当 $C_1 = 0, C_2 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = C_2 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{-q}x} = 0$.当 $q = 0$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 原方程通解为 $y = C_1 x + C_2$.当 $q > 0$ 时, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{q}i$, 原方程通解为 $y = C_1 \cos \sqrt{q}x + C_2 \sin \sqrt{q}x$.显然, 只有 $q < 0$ 时, 原方程存在当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于零的非零解, 故应选(C).**637** 【答案】 B

【分析】 由二阶线性微分方程通解的结构及题设知所求的二阶线性常系数非齐次方程相应的齐次方程有两个线性无关解 $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-x}$, 该微分方程的特征根分别是 $\lambda_1 = 2$ 与 $\lambda_2 = -1$, 从而特征方程是 $(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$, 即 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. 由此可见所求方程的形式是 $y'' - y' - 2y = f(x)$.

因此只能在(B)与(D)中选择.

方法1 由于 $-2xe^{-x}$ 是该方程的一个特解, 又由于 $\lambda = -1$ 是单特征根, 故只能是 $f(x) = 6e^{-x}$ ($f(x) = 3xe^{-x}$ 时, 它的特解类型是 $(ax + b)xe^{-x}$). 选(B).

方法2 记 $\bar{y} = -2xe^{-x}$, 则方程的右端项 $f(x) = \bar{y}'' - \bar{y}' - 2\bar{y}$.由于 $\bar{y}' = 2(x-1)e^{-x}, \bar{y}'' = 2(2-x)e^{-x}$, 故

$$f(x) = 2(2-x)e^{-x} - 2(x-1)e^{-x} + 4xe^{-x} = 6e^{-x}$$

代入即得相应的微分方程是 $y'' - y' - 2y = 6e^{-x}$.**638** 【答案】 C【分析】 需求对价格 P 的弹性即 $\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP}$, 按题意

$$\begin{cases} \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} = -P(\ln P + 1) \\ Q(P) \Big|_{P=1} = 1 \end{cases}$$

这是可分离变量的一阶微分方程, 分离变量得

$$\frac{dQ}{Q} = -(\ln P + 1)dP$$

积分得

$$\ln Q = - \int (\ln P + 1)dP = -P \ln P + C_1, Q = Ce^{-P \ln P} = CP^{-P}$$

由初值 $\Rightarrow C = 1$, 即 $Q = P^{-P}$. 选(C).

639 【答案】 B

【分析】 由于 $f(t) = t^2 - 1$ 为二次式, 又因为 $a = -1$, 所以特解形式为

$$\bar{y}(t) = t(At^2 + Bt + C) = At^3 + Bt^2 + Ct$$

应选(B).

【评注】 计算可得 $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{5}{6}$.

640 【答案】 C

【分析】 根据设特解的规则应设特解

$$\bar{y}(t) = A \sin \frac{\pi}{2}t + B \cos \frac{\pi}{2}t$$

代入方程计算可得

$$A = -2, B = -1$$

故应选(C).

【评注】 一阶常系数非齐次线性差分方程 $y_{t+1} + ay_t = f(t)$ 的特解取法如下:

若 $f(t) = p_m(t)d^t$, 其中 $p_m(t)$ 是 t 的 m 次多项式, 常数 $d \neq 0$. 特解的取法如下表

$f(t)$	系数 a 满足的条件	特解 $\bar{y}(t)$ 的形式
$p_m(t)$	$a + 1 \neq 0$	$Q_m(t)$
$p_m(t)$ 是 t 的 m 次多项式	$a + 1 = 0$	$t Q_m(t)$
Md^t	$a + d \neq 0$	Ad^t
常数 $M \neq 0, d \neq 1$	$a + d = 0$	Atd^t

其中 $Q_m(t)$ 是待定系数的 m 次多项式; A 是待定常数.

若 $f(t) = M \cos \omega t + N \sin \omega t$, 其中 M, N, ω 是常数, 且 $0 < \omega < 2\pi, \omega \neq \pi$, 这时可取特解 $\bar{y}(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, 其中 A 和 B 是待定常数. 注意, 即使 M 与 N 中有一个为零, 也应设特解是以上形式.

无穷级数

A 组

641 【答案】 B

【分析】 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散. 又

$$u_n = \frac{1}{2}[(u_n + |u_n|) + (u_n - |u_n|)], |u_n| = \frac{1}{2}[(u_n + |u_n|) - (u_n - |u_n|)],$$

再按级数的运算即知, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - |u_n|)$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,

若其中一个收敛, 另一个发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 均与已知矛盾, 因此它们都发散. 即应选(B).



若熟悉评注中的结论,由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散,即可知 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm |u_n|)$ 均发散.

【评注】 利用级数的性质判断敛散性,最常用的是通项分解法.即利用级数的线性性质,并利用下表中的结论:

假设		结论
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$
收敛	收敛	$\Rightarrow$ 收敛
收敛	发散	$\Rightarrow$ 发散
发散	发散	不确定
绝对收敛	绝对收敛	$\Rightarrow$ 绝对收敛
绝对收敛	条件收敛	$\Rightarrow$ 条件收敛
条件收敛	条件收敛	$\Rightarrow$ 收敛(是条件收敛还是绝对收敛与具体级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 有关)

642 【答案】 A

【分析】 方法1 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛,可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 收敛.

由不等式 $2|u_n v_n| \leq u_n^2 + v_n^2$ 及正项级数的比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2|u_n v_n|$ 收敛,从而

$\sum_{n=1}^{\infty} 2u_n v_n$ 收敛.

又因 $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n$,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛,故应选(A).

方法2 设 $u_n = \frac{1}{n^2}, v_n = 1 (n = 1, 2, \dots)$,则可知(B)不正确.

设 $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} (n = 1, 2, \dots)$,则可知(C)不正确.

设 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, v_n = -\frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$,则可知(D)不正确.

故应选(A).

【评注】 在本题中命题(D)“若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,且 $u_n \geq v_n (n = 1, 2, \dots)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

也收敛”不正确,这表明:比较判别法(将一个级数与另一级数作比较)虽然适用于正项级数收敛(或级数绝对收敛)的判别,但对任意项级数一般是不适用的.这是任意项级数与正项级数收敛性判别中的一个根本区别.但对一般项级数有如下判别法:若 $U_n \leq u_n \leq W_n (n =$

$1, 2, \dots)$,又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} W_n$ 均收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛.



643 【答案】 B

【分析】 正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 也收敛.

$$|b_n| = \ln(1 + a_{2n}) \sim a_{2n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛. 因此选(B).

【评注】 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 部分和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 有界, 即 $0 \leq S_n \leq M$

$(n=1, 2, 3, \cdots) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 的部分和 $T_n = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} \leq S_{2n} \leq M (n=1, 2, 3, \cdots)$ 即 $\{T_n\}$

有界 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛. (正项级数收敛的充要条件是部分和有界.) 同理 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 也收敛.

644 【答案】 D

【分析】 因为 $|(-1)^{n-1} u_n| = |u_n| = u_n$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 绝对收敛, 命题

(D) 正确.

【评注】 (A) 错误, 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 并且是绝对收敛的.

(B) 和(C) 也是错误的, 例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

645 【答案】 B

【分析】 计算可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2(n+1)+5}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{2n+5} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n+7)}{(n+2)(2n+5)} = 1,$$

从而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n(n+1)} (x-1)^n$ 的收敛半径 $R=1$, 故幂级数在 $|x-1| < 1$ 即 $x \in (0, 2)$ 时绝对收敛.

当 $x=0$ 时幂级数成为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{n(n+1)}$, 由于数列 $\left\{ \frac{2n+5}{n(n+1)} \right\}$ 单调减少且

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{n(n+1)} = 0$, 可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{n(n+1)}$ 收敛.

当 $x=2$ 时幂级数成为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n(n+1)}$, 它的一般项满足 $\frac{2n+5}{n(n+1)} > \frac{1}{n} (n=1, 2, 3, \cdots)$, 可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n(n+1)}$ 发散.

综上即得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{n(n+1)} (x-1)^n$ 的收敛域为 $[0, 2)$, 故应选(B).



646 【答案】 A

【分析】 由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是 $(-8, 8]$ 可知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 8, 从而幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2}$ 的收敛半径也是 8. 又因幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 是由幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2}$ 两次逐项求积分所得 (或 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 两次求导得幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2}$), 由幂级数和函数的性质可得, 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径也是 8. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^3)^n$ 的收敛域是 $-8 < x^3 \leq 8$ 即 $-2 < x \leq 2$.

【评注】 (1) 应掌握幂级数收敛性的如下特点: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与其逐项求导或逐项求积分后的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

有相同的收敛半径.

本题还考察间接求幂级数的收敛域的方法.

(2) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径时, 以下解法虽可选出正确选项, 但理论根据却是错误的:

由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是 $(-8, 8]$ 可知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 8, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{8}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n-1)na_{n+1}}{n(n+1)a_n} \right| = \frac{1}{8}$, 于是幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径是 8. 错误之处在于, 因为已知的定理是: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$, 但反过来不一定对, 即若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则不一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$. 因为极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 可能不存在, 因此前面的解法是加强了条件即假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 存在的前提下获得的结果.

647 【答案】 C

【分析】 方法 1 分解法, 转化为用公式 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} (-1 < x \leq 1)$.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-x)^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x \right) \\ &= -\frac{1}{x} \ln(1-x) - 1 \quad (-1 \leq x < 1, x \neq 0) \end{aligned}$$



⇒

$$S(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) + 1 \quad (-1 \leq x < 1, x \neq 0)$$

应选(C).

方法2 逐项求导两次, 转化为几何级数求和

$$xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \Rightarrow (xS(x))'' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

$$(xS(x))' = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$$

$$\begin{aligned} xS(x) &= -\int_0^x \ln(1-t) dt = -t\ln(1-t) \Big|_0^x + \int_0^x \frac{-t+1-1}{1-t} dt \\ &= -x\ln(1-x) + x + \ln(1-x) \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

⇒

$$S(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) + 1 \quad (-1 \leq x < 1, x \neq 0).$$

(右端函数在 $x=-1$ 右连续, 左端级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 在 $x=-1$ 收敛, 故 $x=-1$ 时等式也成立.)

【评注】 (1) $S(0) = 0$.

$$(2) S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) + 1 \quad (-1 \leq x < 1, x \neq 0)$$

左端级数在 $x=1$ 收敛,

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-\ln(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) + 1] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x}(1-x)\ln(1-x) + 1 = 1$$

$$\text{因此} \quad S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(1-x)\ln(1-x) + 1, & -1 \leq x < 1, x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

648 【答案】 B

【分析】 方法1 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ ($|x| < 1$), 则 $S(0) = 0$. 因为 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n\right)' =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \text{ 即 } S'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

$$\text{故 } S(x) = \int_0^x S'(t) dt + S(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} + 0 = -\ln(1-x) = \ln \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

方法2 已知

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (|x| < 1)$$

将 x 换成 $-x$ 得

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (|x| < 1), \text{ 故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) = \ln \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1), \text{ 即应选(B).}$$



649 【答案】 B**【分析】** 按定义先计算级数的前 n 项部分和 S_n . 由于

$$S_n = \frac{2}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

$$\frac{2}{3}S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + (n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n + n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},$$

两式相减即得

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S_n &= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n - n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} - n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},\end{aligned}$$

于是对 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 就有

$$S_n = 6 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

用比值判别法容易判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 是收敛的, 从而其一般项满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$,由此即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$. 取极限即得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 的和 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 6$.**650 【答案】 A****【分析】** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = \frac{5}{4}$ 时收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R \geqslant$ $\frac{5}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径 $R \geqslant \frac{5}{4} \Rightarrow x = 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 绝对收敛. 即 $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|$ 收敛.

因此, 应选(A).

B 组**651 【答案】 B****【分析】** 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 由

$$|a_n| \leqslant b_n$$

知, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛与题设矛盾, 故应选(B).**652 【答案】 B****【分析】** 这里级数的一般项中含有三种类型的无穷大量.

$$n^\mu (\mu > 0), q^n (q > 1), \ln^\delta n (\delta > 0)$$

其中 $n \rightarrow \infty$, 它们的关系是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\mu}{q^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^\delta n}{n^\mu} = 0$$



现考察此正项级数的一般项:

$$\frac{n^\gamma + \alpha^n}{n^a + \ln^\beta n + \gamma^n} = \frac{\alpha^n \left(1 + \frac{n^\gamma}{\alpha^n}\right)}{\gamma^n \left(1 + \frac{\ln^\beta n}{\gamma^n} + \frac{n^a}{\gamma^n}\right)} \sim \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^n (n \rightarrow \infty)$$

这里 $a_n \sim b_n (n \rightarrow \infty)$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < 1 \text{ 即 } \alpha < \gamma.$$

因此, 原级数收敛 $\Leftrightarrow \alpha < \gamma$. 故应选(B).

653 【答案】 C

【分析】 由于数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots > 0$, 从而数列 $\{a_n\}$ 必存在极限, 若

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则必有交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 与题设条件矛盾. 从而存在常数 $a > 0$ 使得

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a_n \geq a > 0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_n + 1} \leq \frac{1}{a + 1} < 1 (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\Rightarrow \left| (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n \right| \leq \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n \leq \left(\frac{1}{a + 1}\right)^n.$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a + 1}\right)^n$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{a_n + 1}\right)^n$ 绝对收敛, 应选(C).

654 【答案】 D

【分析】 因当 $n \geq 2$ 时 $\left| (-1)^{n-1} \frac{\ln(n+1)}{n} \right| \geq \frac{1}{n}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 从而级数 ① 非绝对收敛; 令 $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, 于是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x(x+1)} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(x+1) - 1 \right] < 0$ 当 $x \geq 2$ 时成立, 这表明 $\left\{ \frac{\ln(n+1)}{n} \right\}$ 当 $n \geq 2$ 时单调减少且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0$, 由莱布尼兹判别法知级数 ① 收敛. 综合即知级数 ① 条件收敛.

因 $\sin\left(n\pi + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$, 且 $\left| (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, 从而由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散知级数 ④ 非绝对收敛; 因 $\left\{ \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ 单调减少且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, 由莱布尼兹判别法知级数 ④ 收敛. 综合即知级数 ④ 条件收敛.

因 $\left| (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n} \right| \leq \frac{n}{2^n}$, 又令 $u_n = \frac{n}{2^n} (n = 1, 2, \cdots)$ 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$,

故由比值判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛, 即级数 ② 绝对收敛.



$$\text{因 } \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} - (-1)^n} = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1},$$

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 条件收敛, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ 发散, 故级数 ③ 发散.

从上面讨论可得仅级数 ①④ 条件收敛, 应选(D).

655 【答案】 D

$$\text{【分析】 由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{na}{n+1}\right)^n}{\frac{a^n}{e}} = 1 \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{e} = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ \frac{1}{e}, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}.$$

故当 $a \geq 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{na}{n+1}\right)^n \neq 0$, 故当 $a \geq 1$ 时原级数发散. 选(D).

【评注】 当 $0 < a < 1$ 时由

$$\left(\frac{na}{n+1}\right)^n \sim \frac{1}{e} a^n \quad (n \rightarrow \infty)$$

以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} a^n$ 收敛可知原级数收敛.

656 【答案】 D

【分析】 若 $\int_0^{+\infty} e^{(p-2)x} dx$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 均收敛, 则同时有 $p-2 < 0$ 且 $p > 0$, 综合得 $0 < p < 2$. 故选(D).

657 【答案】 C

【分析】 把分解通项法用于级数(1) 可得其通项

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n [\sqrt{n+1} - (-1)^n]}{n+1-1} \\ &= (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n} - \frac{1}{n} \\ &= (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{(-1)^n}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

由莱布尼兹判别法即知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 都收敛, 但调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

发散. 从而交错级数(1) 作为两个收敛级数与一个发散级数的和, 必发散.

改写级数(2) 的通项可得

$$\begin{aligned} \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) &= \sin[(\sqrt{n^2+1} - n)\pi + n\pi] \\ &= \sin(\sqrt{n^2+1} - n)\pi \cdot \cos n\pi + \cos(\sqrt{n^2+1} - n)\pi \cdot \sin n\pi \end{aligned}$$



$$= (-1)^n \sin(\sqrt{n^2+1} - n)\pi = (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1} + n},$$

由此即知级数(2)是交错级数,由莱布尼兹判别法可知级数(2)收敛.

综合知应选(C).

658 【答案】 C

【分析】 对于级数(1),记 $f(x) = \frac{1}{x \ln x} (x \geq 2)$, 则 $f(x)$ 非负递减, $f(n) = \frac{1}{n \ln n} (n \geq 2)$, 且

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \text{ 发散,}$$

由积分判别法,级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散,结合 $\frac{1}{\ln n!} \geq \frac{1}{n \ln n}$ 以及正项级数的比较审敛法,可知级数

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$ 发散;

对于级数(2),由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln^3 n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}} = 0$, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,结合正项级数的比较审敛法

的极限形式,可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n^2}$ 收敛.

综上,选择(C).

659 【答案】 D

【分析】 计算可得两个幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛半径 R 与收敛域分别是 1 与 $[-1, 1]$. 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = S_1(x), \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = S(x), x \in [-1, 1],$$

则 $S(x) = x S_1(x)$. 从而只需求出和函数 $S_1(x)$ 即可.

当 $|x| < 1$ 时将幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ 逐项求导得

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} = \frac{1}{1+x^2},$$

利用 $S_1(0) = 0$, 故当 $|x| < 1$ 时

$$S_1(x) = \int_0^x S_1'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x.$$

由于 $\arctan x$ 在 $[-1, 1]$ 连续, 且幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ 在 $x = -1$ 与 $x = 1$ 两点处都收敛,

从而和函数公式 $S_1(x) = \arctan x$ 不仅在 $|x| < 1$ 成立, 而且还在 $x = -1$ 与 $x = 1$ 也成立. 即 $S_1(x) = \arctan x, x \in [-1, 1]$.

故 $S(x) = x \arctan x, x \in [-1, 1]$, 应选(D).



660 【答案】 A

【分析】 设 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$, 由几何级数和函数公式

$$S_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} (|x| < 1)$$

可得 $S_1(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = x S_0(-x) = \frac{x}{1+x} (|x| < 1)$.

设 $S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^n$, 则

$$\begin{aligned} S_2(x) &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n \right)' = x S_1'(x) \\ &= x \left(\frac{x}{1+x} \right)' = x \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} (|x| < 1). \end{aligned}$$

设 $S_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$, 则

$$\begin{aligned} S_3(x) &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1} = x \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^n \right]' \\ &= x \left[\frac{x}{(1+x)^2} \right]' = x \left[\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x)^3} \right] \\ &= x \frac{1+x-2x}{(1+x)^3} = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3} (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } S(x) &= S_3(x) - 3S_2(x) + 5S_1(x) = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3} - \frac{3x}{(1+x)^2} + \frac{5x}{1+x} \\ &= \frac{x(5x^2 + 6x + 3)}{(1+x)^3} (|x| < 1). \end{aligned}$$

应选(A).



扫描二维码, 获取更多免费资料

